Diferenciální rovnice

rovnice, kde neznámá je funkce, v rovnicích jsou i derivace neznámé funkce.

- OBYČEJNÉ DR (ODR) : funkce jedné proměnné
- PARCIÁLNÍ DR (PDR) : funkce více proměnných, parciální derivace
  (nebudeme řešit)

úloha: nalezněte funkci $y = y(x)$, pro kterou platí $\boxed{y' = 3x^2}$

$$y_1 = x^3, \quad y_2 = x^3 - 5 \quad \rightarrow \quad y = x^3 + c$$

úloha: $y' = 3x^2$ a $y(0) = 1$ → musíme vybrat řešení (volbou konstanty c) aby tato tzv. počáteční podmínka platila: $1 = 0^3 + c \rightarrow c = 1$

$$y = x^3 + 1$$

Lineární diferenciální rovnice (LDR) n-tého řádu

Nechť $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou reálné funkce definované na intervalu I $(\subset \mathbb{R})$ a $a_n \neq 0$. Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu pro neznámou funkci $y = y(x)$ nazýváme rovnici

$$(*) \quad \underbrace{a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2(\cancel{y}\, x) \cdot y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x)\, y}_{L(y)} = f(x)$$

$$L(y) = f(x)$$

Pro $f(x) = 0$ se LDR nazývá homogenní (v opačném případě nehomogenní).

Funkce $y = y(x)$, která splňuje rovnici $(*)$ pro každé $x \in I$, se nazývá řešení rovnice $*$.

Rovnice (*) spolu s podmínkami $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$ se nazývá počáteční úloha nebo Cauchyova úloha.

Platí: Jsou-li $a_0, a_1, \dots, a_n$ a f spojité funkce na otevřeném intervalu I, má počáteční úloha rovnice (*) právě jedno řešení.

Funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definované na I se nazývají <u>lineárně závislé</u>, jestliže existují konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ takové, že alespoň jedna z nich je nenulová a pro $\forall x \in I$ platí

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$$

V opačném případě jsou funkce lineárně nezávislé.

a) $y_1(x) = x^2$

$y_2(x) = 0$

$0x^2 + 7 \cdot 0 = 0$

$0y_1 + 7y_2 = 0 \to$ y_1 a y_2 jsou lin. závislé

b) $y_1 = \sin^2 x$

$y_2 = \cos^2 x$

$y_3 = 2$

$\underline{2} \cdot \sin^2 x + \underline{2} \cdot \cos^2 x - \underline{1} \cdot 2 = 0$

$2y_1 + 2y_2 - 1 \cdot y_3 = 0$

$\downarrow$

y_1 a y_2 a y_3 jsou lin. závislé

Funkce $y_1, y_2, \dots, y_n$, které řeší rovnici $L(y) = 0$ na I, jsou lineárně závislé právě tehdy, když determinant (tzv. Wronskiho determinant)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Množina všech řešení homogenní rovnice n-tého řádu je tvořena všemi funkcemi, které se dají psát $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, kde $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou libovolná lin. nezávislá řešení a $c_1, \dots, c_n$ jsou libovolné konstanty. Funkce $y_1, \dots y_n$ se nazývají fundamentální systém rovnice a y je tzv. obecné řešení.

Příklad: $y'' - y = 0$

$y'' = y$

obecné řešení: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in R$

$y_1 = e^x$

$y_2 = e^{-x}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\underbrace{e^x e^{-x}}_{e^{x-x} = e^0 = 1} - e^{-x} \cdot e^x = -2 \neq 0$$

y_1 a y_2 jsou lin. nezávislé