Komplexní čísla a kořeny polynomů

$x^2+1=0$ $\quad x^2=-1$ $\quad$ číslo: $\boxed{i^2=-1 \quad \sqrt{-1}=i}$

$\boxed{\begin{matrix} x_1=i \\ x_2=-i \end{matrix}}$

$\downarrow$

komplexní čísla : $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$

$z_1=1+3i$, $z_2=5-2i$, $z_3=8$, $z_4=-2i$

sčítání: $z_1+z_2=1+3i+5-2i=6+i$

odčítání: $z_2-z_1=5-2i-(1+3i)=4-5i$

násobení: $z_1\cdot z_2=(1+3i)\cdot(5-2i)=5-2i+15i-6\overset{=-1}{i^2}=11+13i$

dělení: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{6+2i+15i-6}{25-10i+10i+4}=\frac{17i}{29}=0+\frac{17}{29}i$

komplexní sdružení $\overline{z_2}=5+2i$ $\quad \overline{z_1}=1-3i$ $\quad \overline{z_3}=8$ $\quad \overline{z_4}=2i$

$$x^2+4x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{(-1)\cdot 4}}{2}=\frac{-4\pm\overset{=i}{\sqrt{-1}}\cdot\overset{=2}{\sqrt{4}}}{2}=\frac{-\cancel{4}^{\,2}\pm\cancel{2}i}{\cancel{2}}=\underline{\underline{-2\pm i}}\left\langle\begin{array}{l}-2+i\\ -2-i\end{array}\right.$$

$$x^2+2x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm\overset{=4}{\sqrt{16}}\cdot\overset{=i}{\sqrt{-1}}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}=\underline{\underline{-1\pm 2i}}\left\langle\begin{array}{l}-1+2i\\ -1-2i\end{array}\right.$$

Polynom stupně n nad tělesem T ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) je výraz

reálná komplexní

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \text{ kde } a_0, \dots, a_n \in T, \ a_n \neq 0$$

kořen polynomu $p(x)$ je takový prvek $c \in T$, pro který

$$p(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \dots + a_n c^n = 0$$

Prvek c je kořen polynomu $p(x)$ právě když polynom $(x - c)$ dělí polynom $p(x)$

největší číslo l takové, že $(x-c)^l$ dělí polynom $p(x)$ se nazývá násobnost kořene c.

Nechť $p(x)$ je polynom nad tělesem T, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in T$ jsou po dvou různá čísla a $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}$

Pak je ekvivalentní: 1) pro každé $i = 1, \ldots, n$ je c_i kořen $p(x)$ násobnosti l_i

2) $$p(x) = (x - c_1)^{l_1} \cdot (x - c_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x - c_n)^{l_n} \cdot q(x),$$

kde $q(x)$ je polynom takový, že $c_1, \ldots, c_n$ nejsou jeho kořeny.

→ každý polynom st. aspoň 1 lze v $\mathbb{C}$ psát jako součin konstanty a polynomů stupně 1: tzv. kořenových činitelů.

$$p_1(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

$$p_2(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1) = (x-i)(x+i)(x-1)(x+1)$$

$$p_3(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = (x-0)^2(x-2)(x-3)$$

$$p_4(x) = x^6 + 9x^4 = x^4(x^2+9) = (x-0)^4(x+3i)(x-3i)$$

$$x^2 + 9 = 0$$

$$p_5(x) = x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$y = x^2 \quad y^2 = x^4 \longrightarrow y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$y_1 = -2 \rightarrow x^2 = -2 <$ $\underline{x_3 = \sqrt{2}\,i}$, $\underline{x_4 = -\sqrt{2}\,i}$

$y_2 = 1 \longrightarrow x^2 = 1 <$ $\underline{x_1 = 1}$, $\underline{x_2 = -1}$

$$((\sqrt{2}\,i))^2 = \sqrt{2}^2 \cdot i^2 = 2(-1) = -2$$