OLDR n-tého řádu s konstantními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$ kde

$a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ jsou reálná čísla a $f(x)$ je funkce.

Homogenní rovnice: $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$

očekáváme řešení $y = e^{\lambda x}$, kde λ je nějaké číslo

$y' = e^{\lambda x} \cdot \lambda \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x} \ldots$

$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ a dosadíme do rovnice:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$$

$$\boxed{\lambda^n + \lambda^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

charakteristická rovnice

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$\downarrow$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 3$

řešení: $y = e^{\lambda x} \longrightarrow y_1 = e^{2x}$ a $y_2 = e^{3x}$

obecné řešení: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1) Ke každému reálnému λ char. rovnice získáváme řešení $\boxed{y = e^{\lambda x}}$

2) $y'' + 4y = 0$

$\downarrow$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 = -4$

$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = \underline{\pm 2i} = \overset{a}{0} \pm \overset{b}{2}i$

(2) Pro komplexní kořeny ch.r. $a \pm bi$ získáme dvě řešení: $\boxed{\begin{aligned} y_1 &= e^{ax}\cos bx \\ y_2 &= e^{ax}\sin bx \end{aligned}}$

$y_1 = e^{2ix}$ a $y_2 = e^{-2ix}$ $\longrightarrow$ $y_{I} = e^{0x}\cos 2x = \underline{\cos 2x}$, $y_{II} = e^{0x}\sin 2x = \underline{\sin 2x}$

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

~~pro~~ $y_1 = e^{(a+bi)x}$ a $y_2 = e^{(a-bi)x}$

$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}\cdot e^{bix} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$

$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}\cdot e^{-bix} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \boxed{e^{ax}\cos bx = y_{I}}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{2} i = \boxed{e^{ax}\sin bx = y_{II}}$$

příklad: $y'' + 4y' + 5y = 0$

$$\downarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \underline{-2 \pm i}$$

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-2}_{a} \pm \underbrace{1}_{b} i$$

$$y_1 = e^{ax} \cos bx = e^{-2x} \cos x$$

$$y_2 = e^{ax} \sin bx = e^{-2x} \sin x$$

obecné řešení: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \underline{c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

příklad: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$\downarrow$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$\lambda_{1,2,3} = 1$ (trojnásobný kořen ch. r.)

$y_1 = e^x \quad y_2 = xe^x \quad y_3 = x^2 e^x \rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

---

3) Má-li ch. r. reálný kořen α násobnosti k, získáme k lin. nezávislých řešení

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = x e^{\alpha x},\ y_3 = x^2 e^{\alpha x},\ \dots,\ y_k = x^{k-1} e^{\alpha x}$$

Má-li ch. r. komplexní kořeny $\alpha \pm i\beta$ násobnosti k, získáme $2k$ lin. nez. ř:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Příklady: $y''' + 9y' = 0$

$$\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 9) = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda^2 + 9 = 0$

$\lambda^2 = -9$

$\lambda_{2,3} = \pm 3i = \overset{a}{0} \pm \overset{b}{3}i$

$y_1 = e^{0x} = 1$

$y_2 = \cos 3x$

$y_3 = \sin 3x$

$$y = c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$y'''' - y = 0 \qquad y'''' = y$

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow y_1 = e^x$

$\lambda_2 = -1 \rightarrow y_2 = e^{-x}$

$\left.\begin{array}{l}\lambda_3 = i \\ \lambda_4 = -i\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y_3 = \cos x \\ y_4 = \sin x \end{array}$

$(\underset{a}{0} \pm \underset{b}{1}i)$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = \overset{a}{-2} \pm \overset{b}{3}i$$

$$y_1 = e^{-2x} \cos 3x$$

$$y_2 = e^{-2x} \sin 3x$$

$$y = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'''' + 2y'' + y = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2+1)^2 = 0$$

$$(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = i = 0 + 1i$$

$$\lambda_{3,4} = -i = \underset{a}{0} - \underset{b}{1}i$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

$y_1 = \cos x$ $\quad y_3 = x \cdot \cos x$

$y_2 = \sin x$ $\quad y_4 = x \cdot \sin x$