Integrální počet

PRIMITIVNÍ FUNKCE :

příklad: Nalezněte funkci $F(x)$ takovou, že $F(x)' = f(x) = 4x$.

Neboli: Co máme derivovat, aby $4x$ byl výsledek?

$F_1(x) = 2x^2$

$F_2(x) = 2x^2 + 7$

$F_3(x) = 2x^2 - 1127{,}5$

...

Mějme funkce F a f definované v otevřeném intervalu I.
Jestliže pro každé $x \in I$ je $F'(x) = f(x)$, nazýváme funkci F primitivní funkcí k f.

Je-li F primitivní funkce k f na I, pak každá další ~~fu~~ primitivní funkce k f na I je ve tvaru $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Ke každé funkci f spojité na otevřeném intervalu I existuje na tomto intervalu primitivní funkce

Příklad: hledáme primitivní funkce pro

$g(x) = \sin x$ $\quad$ $G(x) = -\cos x$, protože

$$(-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$$

$h(x) = 2x - 1$ $\quad$ $H(x) = x^2 - x$

$k(x) = x \cdot \sin x$ $\quad$ $K(x) = ?$

$l(x) = e^{x^2}$ $\quad$ $L(x) = ?$

Neurčitý integrál

Zápis $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in I$, že

$F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na I.

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad , x \in (-\infty, +\infty), \ c \in \mathbb{R}$$

$$\int (2x-1)\,dx = x^2 - x + c \quad , x \in (-\infty, +\infty), \ c \in \mathbb{R}$$

Základní vzorce

$$\int 0\,dx = c \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int 1\,dx = x + c \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\,, \qquad n \in \mathbb{N} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$n \in \mathbb{R} \quad x \in (0, +\infty)\,, \; n \neq -1$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \quad x \in (0, +\infty) \\ &\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad x \in (-\infty, 0) \end{aligned}\right\} \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \qquad x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c\,, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + c\,, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Platí:

$$\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Příklady:

$x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int (x+1)(x-1)\,dx = \int (x^2-1)\,dx = \int x^2\,dx - \int 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x + c$$

$$\int (2x+1)^2\,dx = \int (4x^2+4x+1)\,dx = \int 4x^2\,\cancel{dx}\,dx + \int 4x\,dx + \int 1\,dx =$$

$$= 4\int x^2\,dx + 4\int x\,dx + \int 1\,dx = 4\,\frac{x^3}{3} + 4\,\frac{x^2}{2} + x + c$$

$x \in (-\infty, +\infty)$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{x}\,dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{x}\right)dx = \int\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}+2x^{-1}\right)dx =$$

$$= \int\left(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-1}\right)dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + 2\int\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\ln|x| + c =$$

$$= 2\sqrt{x} + 2\ln x + c,\quad x\in(0,+\infty)$$

$$\int 3e^{x} - 2\cos x\,dx = 3\int e^{x}dx - 2\int\cos x\,dx = 3e^{x} - 2\sin x + c$$

$$\int(3x^{8}-x^{3})\,dx = 3\int x^{8}dx - \int x^{3}dx = 3\frac{x^{9}}{9} - \frac{x^{4}}{4} + c$$

Integrování metodou per partes

Nechť $u(x)$ a $v(x)$ jsou funkce, které mají spojité derivace na otevřeném intervalu I.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \text{obě strany integrujeme}$$

$$u \cdot v = \int u' \cdot v \, dx + \underline{\int u \cdot v' \, dx}$$

$$\boxed{\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx}$$

<u>příklad</u>: $\int \overset{u}{x} \, \overset{v'}{\sin x} \, dx = -x\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx =$

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = \sin x \qquad v = -\cos x$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x \, dx$$

TOTO NÁM NEPOMŮŽE!

$u = \sin x \qquad u' = \cos x$

$v' = x \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - \left(2x e^x - \int 2 e^x \, dx\right) =$$

$u = x^2 \qquad u' = 2x \qquad\qquad u = 2x \qquad u' = 2$

$v' = e^x \qquad v = e^x \qquad\qquad v' = e^x \qquad v = e^x$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

$$\int 1\cdot \ln x\,dx = x\cdot \ln x - \int \underbrace{\frac{1}{x}\cdot x}_{=1}\,dx = x\cdot\ln x - x + c, \quad x\in(0,+\infty)$$

$$u=\ln x \qquad u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \qquad v=x.$$

PER PARTES ROVNICE

$$\int e^x \sin x\,dx = \sin x\, e^x - \int e^x \cos x\,dx = \sin x\, e^x - \left(\cos x\, e^x + \int \sin x\, e^x\right)$$

$$u=\sin x \qquad u'=\cos x$$

$$v'=e^x \qquad v=e^x$$

$$u=\cos x \qquad u'=-\sin x$$

$$v'=e^x \qquad v=e^x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \sin x\cdot e^x - \cos x\cdot e^x - \int e^x \sin x\,dx \quad \Big/ + \int e^x \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = (\sin x - \cos x)\cdot e^x \quad \Big/ :2$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{(\sin x - \cos x)\cdot e^x}{2} + c$$