# MATICE

Maticí typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbb{R}$ rozumíme obdélníkové schéma reálných čísel s $m$ řádky a s $n$ sloupci. Pro $m = n$ se nazývá matice čtvercová.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \text{ pro } i = 1 \dots m \text{ a pro } j = 1 \dots n$$

# Jednoduché operace s maticemi

Jsou-li $A=(a_{ij})$ a $B=(b_{ij})$ matice stejného typu $m\times n$, definujeme:

1) Matice $A$ a $B$ považujeme za stejné a píšeme $A=B$, jestliže $a_{ij}=b_{ij}$ pro všechna $i=1\dots m$ a $j=1\dots n$.

2) Součet matic $A$ a $B$ definujeme jako matici $A+B$ typu $m\times n$:
$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \text{ pro } i=1\dots m \text{ a } j=1\dots n.$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Opačnou matici $-A=(-a_{ij})$
$$-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

4) pro číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme $\alpha$-násobek matice $A$ jako

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \text{ pro } i = 1 \dots m \text{ a } j = 1 \dots n$$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \end{bmatrix}$$

5) nulovou matici $O = (o_{ij}) : o_{ij} = 0$ pro $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$

6) Transponovaná matice k matici $A$ typu $m \times n$ je matice

$A^T = (c_{ij})$ typu $n \times m$, kde $c_{ij} = a_{ji}$ pro $\begin{matrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots m \end{matrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

## Vlastnosti

$A + B = B + A$ komutatívnosť

$(A + B) + C = A + (B + C)$ asociatívnosť

$\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

# Součin matic

Definice: Nechť $A=(a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $B=(b_{jk})$ je matice typu $n \times p$. Součin matic $A \cdot B$ (v tomto pořadí) definujeme jako matici $C=(c_{ik})$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí:

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}.$$

1) aby násobení bylo definováno: počet sloupců 1. matice = = počet řádků 2. matice

2) Jak se počítá? $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$C = A \cdot B = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & \boxed{0} & -3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 4 & 6 & -8 \end{bmatrix}}$$

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = \cancel{4}\, 3$$

$$c_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + (-3) 6 = -8$$

"Řádek krát sloupec"

Nemusí platit $A \cdot B = B \cdot A$

Příklady: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 \times 3 & & 3 \times 1 \\ A \cdot B & = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 \times 1 & & 1 \times 3 \\ B \cdot A & = & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

---

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$C \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C \cdot D \neq D C$

$$D \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$E \cdot F = F \cdot E$

$$F \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Vlastnosti</u>: $(A \cdot B) C = A \cdot (B \cdot C)$ asociativita (pokud součiny jsou definovány)

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$C \cdot A + B \cdot C$ – nelze vytknout $C$!

**Jednotková matice** je čtvercová matice $E_n$ $(n \times n)$ nebo $E$

$$E = (e_{ij}) = (\delta_{ij}) \qquad e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

např. $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ hlavní diagonála

Pro každou matici $A$ resp. $B$ platí $A \cdot E = A$ mají-li součiny smysl.

$$E \cdot B = B$$

Pro čtvercové matice stejného typu $A \cdot E = E \cdot A = A$