ARITMETICKÉ VEKTORY

n-rozměrný aritmetický vektor nad $\mathbb{R}$: uspořádaná n-tice reálných čísel

Množina všech n-rozměrných vektorů (spolu s + a ·) se nazývá n-rozměrný aritmetický prostor $\to \mathbb{R}^n$. Přirozené číslo n se nazývá dimenze prostoru.

složky

$\vec{x} = (1,2,3)$ $\qquad$ $\vec{y} = (1,2,4,0,5)$ $\qquad$ $\vec{o} = (0,0,0,0)$ nulový vektor

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\vec{y} \in \mathbb{R}^5$ $\qquad$ $\vec{o} \in \mathbb{R}^4$

obecně:

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\qquad$ čísla $x_1, \dots, x_n$ nazýváme složky vektoru sčítání aritmetických vektorů : po složkách

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$(1, 2, 3) + (2, 0, -3) = (3, 2, 0)$$

$$(2, 2, 2, 2, 2) + (1, -1, 2, 0, 3) = (3, 1, 4, 2, 5)$$

násobení vektoru skalárem (konstantou) : po složkách

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

$$5 \cdot (1, 2, 3, 4) = (5, 10, 15, 20)$$

řádkový vektor : jednořádková matice : $\vec{x} = (1, 2, 3)$

sloupcový vektor : jednosloupcová matice : $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lineární kombinace:

Pro vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ a reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ definujeme lineární kombinaci vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ jako vektor $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_m \vec{x}_m$

Příklad: $\vec{a} = (1,2)$ a $\vec{b} = (3,0)$

např. $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b} = 2(1,2) + 4(3,0) = (14,4)$

Vyjádřete (je-li to možné) vektor $\vec{z} = (9,1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{y} = (1,1)$ a $\vec{x} = (3,-1)$

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (9,1) = \vec{z}$$

$$\alpha(3,-1) + \beta(1,1) = (9,1)$$

$$(3\alpha,-\alpha) + (\beta,\beta) = (9,1)$$

$$(3\alpha+\beta, -\alpha+\beta) = (9,1)$$

$$3\alpha + \beta = 9$$

$$-\alpha + \beta = 1 \quad / \cdot 3$$

$$4\beta = 12 \rightarrow \beta = 3$$

$$\alpha = 2$$

$$\boxed{\vec{z} = 2\vec{x} + 3\vec{y}}$$

Vyjádřete vektor $\vec{d}=(3,6,4)$ jako lineární kombinaci vektorů

$\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,2,0)$ a $\vec{c}=(1,0,-2)$

$$\boxed{\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}}$$

$$(3,6,4)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,0)+\gamma(1,0,-2)$$

$$(3,6,4)=(\alpha,\alpha,\alpha)+(\beta,2\beta,0)+(\gamma,0,-2\gamma)=(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta,\ \alpha-2\gamma)$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=3\\ \alpha+2\beta&=6\\ \alpha-2\gamma&=4\end{aligned}\ \rightarrow\ \begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&2&0&6\\1&0&-2&4\end{array}\right]\\ \begin{array}{cccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \vec{a}&\vec{b}&\vec{c}&\vec{d}\end{array}\end{array} (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-1&3\\0&-1&-3&1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-1&3\\0&0&-4&4\end{array}\right]$$

$$\alpha+\beta+\gamma=3 \rightarrow \alpha=2$$
$$\beta-\gamma=3 \rightarrow \beta=2$$
$$-4\gamma=4 \rightarrow \gamma=-1$$

$$\boxed{\vec{d}=2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}$$

Vyjádřete vektor $\vec{d} = (1,5,0)$ jako lineární kombinaci vektorů

$\vec{a} = (2,1,3)$, $\vec{b} = (1,2,1)$, $\vec{c} = (1,-1,2)$

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

$$(1,5,0) = \alpha(2,1,3) + \beta(1,2,1) + \gamma(1,-1,2) = (2\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta-\gamma,\ 3\alpha+\beta+2\gamma)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha+\beta+\gamma &= 1 \\ \alpha+2\beta-\gamma &= 5 \\ 3\alpha+\beta+2\gamma &= 0 \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-3) \\ (-2) \\ 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] :3$$

$$\vec{d} = (-1-t)\vec{a} + (3+t)\vec{b} + t\vec{c} \text{ pro } t \in \mathbb{R}$$

$$2\alpha+\beta+\gamma = 1$$
$$-\beta+\gamma = -3$$
$$\underline{\gamma = t}\ (t \in \mathbb{R})$$
$$\underline{\beta = t+3}$$
$$\alpha = \frac{1}{2}(1-3-t-t) =$$
$$= \underline{-1-t}$$

např. pro $t=0$: $\boxed{\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}}$

nebo

např. pro $t=1$: $\boxed{\vec{d} = -2\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}}$

atd.

Vyjádřete vektor $\vec{e} = (1,1,1)$ jako lineární kombinaci

$\vec{a} = (2,1,3)$, $\vec{b} = (1,2,1)$ a $\vec{c} = (1,-1,2)$

$$\vec{e} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

$$(1,1,1) = \alpha(2,1,3) + \beta(1,2,1) + \gamma(1,-1,2) = (2\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta\cancel{+2}-\gamma,\ 3\alpha+\beta+2\gamma)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha+\beta+\gamma &= 1 \\ \alpha+2\beta\cancel{+2}-\gamma &= 1 \\ 3\alpha+\beta+2\gamma &= 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cancel{2}\,-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{e} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (-2) \\ 2 \end{array} \sim (-3) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] (-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

nemá řešení

$\vec{e}$ nelze vyjádřit jako lin. kombinaci $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

triviální lineární kombinace vektorů $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$: $0\vec{x_1} + 0\vec{x_2} + \dots + 0\vec{x_n} = \vec{o}$

Vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ se nazývají lineárně nezávislé, jestliže pouze jejich triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.

Vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ se nazývají lineárně závislé, jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace rovna nulovému vektoru.

Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,2,0)$ a $\vec{c}=(1,0,-2)$ lineárně závislé nebo nezávislé.

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{o}$$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,0)+\gamma(1,0,-2)=(0,0,0)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta,\ \alpha-2\gamma)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=0\\ \alpha+2\beta&=0\\ \alpha-2\gamma&=0\end{aligned} \rightarrow \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&-2\end{bmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ \vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\end{array} \cdot(-1) \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&-1&-3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=0 \rightarrow \alpha=0\\ \beta-\gamma&=0 \rightarrow \beta=0\\ -4\gamma&=0 \rightarrow \gamma=0\end{aligned}$$

Jediné řešení je $0\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}=\vec{o}$, vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jsou lineárně nezávislé.

Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(1,2,1)$ a $\vec{c}=(1,-1,2)$ lineárně závislé nebo nezávislé.

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{o}$$

$$\alpha(2,1,3)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,2)=(0,0,0)$$

$$(2\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+2\beta-\gamma,\ 3\alpha+\beta+2\gamma)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned}2\alpha+\beta+\gamma&=0\\ \alpha+2\beta-\gamma&=0\\ 3\alpha+\beta+2\gamma&=0\end{aligned}\quad\longrightarrow\quad \begin{array}{c}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\3&1&2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}(-3)\\(-2)\\2\end{array}\sim\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-3&3\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ \\(-3)\end{array}\sim\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-3&3\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}\begin{array}{c}\\ :3\\ \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned}2\alpha+\beta+\gamma&=0\\ -\beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma&=t \quad t\in\mathbb{R}\\ \beta&=t\\ \alpha&=-t\end{aligned}}$$

např. pro $t=0$: $0\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}=\vec{o}$

ale také

pro $t=1$: $\boxed{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}}$

Vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jsou lineárně závislé