Determinant

determinant – priraďujeme štvorcovým maticiam číslo

determinant matice 2×2 : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ krížové pravidlo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

matice 3×3 :

$$\det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix} \end{array} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 = -1 + 2 - 3 - 2 = \underline{\underline{-4}}$$

<u>Sarrusovo pravidlo</u>

$$\det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix} \end{array} = \underline{b_{11} b_{22} b_{33}} + \boxed{b_{21} b_{32} b_{13}} + b_{31} b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22} b_{31} - b_{23} b_{32} b_{11} - b_{33} b_{12} b_{21}$$

$$B = \begin{bmatrix} \underline{b_{11}} & b_{12} & \boxed{b_{13}} \\ \boxed{b_{21}} & \underline{b_{22}} & b_{23} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & \underline{b_{33}} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$

Výpočet determinantu pomocí eliminace

1) výměna řádků

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$$

Vznikne-li B z A prohozením dvou různých řádků, je ~~det B = -det A~~

$$\det B = -\det A$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = \underline{\underline{-2}}$$

2) vynásobení řádku nenulovou konstantou

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8$$

Vznikne-li B z A vynásobením řádku A číslem $\alpha \neq 0$, je

$$\det B = \alpha \cdot \det A$$

3) Přičtení násobku řádku k jinému řádku

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \urcorner (-1) \\ \leftarrow \lrcorner \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 6 = 4 \qquad \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 2 = 4$$

Vznikne-li B z A přičtením násobku řádku A k jinému jejímu řádku, je $\det B = \det A$

4) Při výpočtu determinantu můžeme stejné úpravy jako s řádky provádět i se sloupci, přičemž platí stejná pravidla: např. výměna sloupců otáčí znaménko determinantu.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -3 \\ \\ \cdot 2 \end{array} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-6) = \underline{\underline{6}}$$

Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det B = b_{11} b_{22} b_{33} + b_{21} b_{32} b_{13} + b_{31} b_{12} b_{23} - (b_{13} b_{22} b_{31} + b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33})$$

$$\det B = b_{11}(b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}) + b_{12}(b_{31} b_{23} - b_{21} b_{33}) + b_{13}(b_{21} b_{32} - b_{22} b_{31})$$

Mějme matici A typu $n \times n$:

A_{ij} označuje matici, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce

a tzv. algebraický doplněk $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

<u>příklad</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad D_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = 45 - 48 = \underline{\underline{-3}}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad D_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = -(8 - 14) = \underline{\underline{6}}$$

Pro matici A typu $n \times n$ platí (rozvoj podle r-tého řádku)

$r = \{1, \dots, n\}$

$$\det A = a_{r1} D_{r1} + a_{r2} D_{r2} + \dots + a_{rn} D_{rn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{0} + \boxed{1} (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

rozvoj dle 1. řádku

$$= -1 \cdot (-5) + 1 = \underline{\underline{6}}$$

Příklad:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & (-1) & \end{array} \\ \begin{vmatrix}1&2&1&3\\2&1&1&4\\2&0&2&1\\3&1&3&-2\end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{rozvoj} \\ \begin{vmatrix}0&2&1&3\\1&1&1&4\\0&0&2&1\\0&1&3&-2\end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \cancel{0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1&4\\0&2&1\\1&3&-2\end{vmatrix}} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{array}{c}\begin{vmatrix}2&1&3\\0&2&1\\1&3&-2\end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} & & (-2) \end{array}\end{array} + \cancel{0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&1&3\\1&1&4\\1&3&-2\end{vmatrix}} + \cancel{0(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}2&1&3\\1&1&4\\0&2&1\end{vmatrix}}$$

$$= -\begin{vmatrix}2&-5&3\\0&0&1\\1&7&-2\end{vmatrix} = -\left(\cancel{0\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-5&3\\7&-2\end{vmatrix}} + \cancel{0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix}} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&-5\\1&7\end{vmatrix}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix}2&-5\\1&7\end{vmatrix} = 14+5 = \underline{\underline{19}}$$