Kapitola 10

Elementární funkce

Mezi *elementární funkce* patří funkce probrané v kapitole Aritmetika a funkce a dále čtyři typy tzv. *transcendentních elementárních* funkcí. Jsou to *exponenciální*, *logaritmické*, *goniometrické* a *cyklometrické* funkce.

V této kapitole se budeme zabývat definicemi transcendentních elementárních funkcí a odvodíme vzorce pro jejich derivace.

Při výkladu exponenciální funkce $x \mapsto a^x$ začneme zopakováním mocninné funkce s přirozeným exponentem a postupně budeme mocniny zobecňovat (rozšiřovat) na celé, racionální a reálné exponenty. Základem pro toto rozšiřování bude vztah (10.1) platný pro přirozené exponenty. Budeme požadovat jeho platnost pro reálné exponenty.

Logaritmickou funkci budeme definovat jako inverzní funkci k exponenciální funkci.

Goniometrické funkce budeme pro úhel z intervalu $(0, \pi/2)$ definovat pomocí pravoúhlého trojúhelníku. Definici rozšíříme na $\mathbb{R}$ pomocí jednotkové kružnice. Z této definice odvodíme vzorce, které budeme používat při výpočtech.

Cyklometrické funkce budeme definovat jako inverzní k vhodně zúženým goniometrickým funkcím. Cyklometrické funkce potřebujeme k vyřešení rovnic typu $\sin x = 0.2$ a na kalkulačce je najdeme pod symboly typu $\sin^{-1}$. Je dobré pamatovat, že zde není -1 exponentem ve smyslu mocniny, ale že značí inverzní funkci.

Zmíníme se o definici exponenciální funkce a goniometrických funkcí pomocí funkcionální rovnice. Tyto definice přebíráme z [2] jako zajímavost a rozšíření obzoru.

K odvození vzorců pro derivace budeme potřebovat následující limity.

Hodnota první závisí na zvolených jednotkách. Ukážeme, že pro *radiány* má hodnotu rovnu *jedné*. Hodnota druhé závisí na zvoleném základu[1] a je rovna jedné pro základ rovný Eulerovu číslu $e \doteq 2.718$. Obě limity mají význam derivace v bodě nula.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

Od výše uvedených limit odvodíme další limity (všechny jsou rovny jedné)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$$

10.1 Mocniny

V článku 3.1 jsme probrali mocniny s přirozeným exponentem. Zde se zamyslíme nad mocninami s obecnějším exponentem. Začneme otázkami.

Otázky. Proč je $2^0 = 1$? Proč je $3^{1/2} = \sqrt{3}$? Proč je $4^{-1} = 1/4$? Následující rovnosti nemůžou všechny platit, plynulo by z nich $-1 = 1$. Které rovnosti se vzdáte?

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$$

A které rovnosti se vzdáte zde?

$$-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = 1$$

Úkol. Nakreslete do jednoho obrázku grafy mocninných funkcí s exponenty jedna, dva, tři, jedna polovina, jedna třetina, tři poloviny, pět polovin.

Z definice mocniny s přirozeným exponentem (3.1) plynou následující vztahy, které použijeme k zobecnění pojmu mocniny pro obecnější exponenty. Prostě budeme požadovat jejich platnost a podíváme se, co z této platnosti plyne.

$$a^{n+m} = a^n a^m \qquad a^{nm} = (a^n)^m \tag{10.1}$$

[1] Ve skutečnosti můžeme změnu základu také interpretovat jako změnu jednotek.

10.3.3 Derivace logaritmu

Vzorec pro derivaci logaritmu odvodíme jako limitu

$$(\log(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}$$

Po úpravách

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h/x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h/x)}{h/x}\frac{1}{x}$$

a použití limity (10.9) dostáváme vzorec

$$(\log(x))' = \frac{1}{x} \tag{10.10}$$

Ukážeme ještě jedno odvození tohoto vzorce (10.10). Použijeme větu o derivaci inverzní funkce.

Derivaci vyjádříme jako podíl linearizovaných přírůstků

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Derivaci inverzní funkce $g = f^{-1}$ vyjádříme také jako podíl linearizovaných přírůstků

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

odkud plyne

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{10.11}$$

Dosaďme $f = \exp$. Dostaneme

$$(\log(y))' = \frac{1}{\exp(x)}$$

a po dosazení $\exp(x) = y$ dostaneme (10.10).

Z věty o derivaci složené funkce pak plyne

$$(a^x)' = a^x \log(a)$$

Ze vztahu (10.8) odvodíme vztah pro logaritmus s obecným základem

$$y = \exp(x \log(a)) \quad \dots \quad \log(y) = x \log(a) \quad \dots \quad x = \frac{\log(y)}{\log(a)}$$

10.3.1 Vlastnosti logaritmu

Logaritmus je inverzní funkcí k exponenciále, proto má definiční obor

$$D(\log) = H(\exp) = (0, \infty)$$

a obor hodnot

$$H(\log) = D(\exp) = \mathbb{R}$$

Do vztahu (10.4) dosadíme $a = \exp(x)$, $b = \exp(y)$ a odtud vyjádřené $x = \log(a)$, $y = \log(b)$. Dostaneme

$$\exp(\log(a) + \log(b)) = ab$$

zlogaritmováním dostaneme

$$\log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

což je známý vzorec pro logaritmus součinu.

Vzorec pro logaritmus podílu dostaneme dosazením $b = c/a$

$$\log(a) + \log(c/a) = \log(c)$$

a úpravou

$$\log(c/a) = \log(c) - \log(a)$$

10.3.2 Limity

Dosadíme do limity (10.3) $y = \exp(x)$ a dále $z = y - 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\log(y)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log(1+z)}$$

Všechny tři limity jsou rovny jedné a věta o limitě podílu nám dá limity převrácených hodnot

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \tag{10.9}$$

10.1.1 Mocniny s celočíselným exponentem

Z (3.1) plyne, že posloupnost

$$a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

je geometrická s kvocientem a. Když k této posloupnosti přidáme na začátek další členy

$$\dots a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

a budeme požadovat, aby byla také geometrická[2], dostaneme pro $a \neq 0$

$$a^0 = a^1/a = 1, \quad a^{-1} = a^0/a = 1/a, \quad a^{-2} = a^{-1}/a = 1/a^2, \dots$$

Jiný způsob odvození je použít vztah (3.1) $a^n = a \cdot a^{n-1}$, vyjádřit z něj $a^{n-1} = a^n/a$ a použít pro $n \in \mathbb{Z}$.

10.1.2 Mocniny s racionálním exponentem

K odvození vztahu pro $a^{1/2}$ použijeme (10.1) s $n = m = 1/2$. Dostaneme $a = a^1 = a^{1/2+1/2} = a^{1/2}a^{1/2}$ a odtud dostaneme pro $a^{1/2}$ rovnici $\left(a^{1/2}\right)^2 = a$, a tedy jsou dvě možnosti: buď je $a^{1/2} = \sqrt{a}$ nebo $a^{1/2} = -\sqrt{a}$.

Výběr znaménka zdůvodníme následovně

$$0 \leq \left(a^{1/4}\right)^2 = a^{1/4}a^{1/4} = a^{1/4+1/4} = a^{1/2}.$$

Podobně odvodíme $\left(a^{1/3}\right)^3 = a$ a tedy $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$.

Definice. Pro $a > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ definujeme

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} \qquad a^{-n/m} = 1/\sqrt[m]{a^n} \tag{10.2}$$

Úkol. Ukažte, že pro $p, q, r \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[qr]{a^{pr}}$.

Poznámky. Tvrzení v předchozím úkolu zajistí, že je definice s racionálním exponentem nezávislá na způsobu zadání exponentu.
Podle uvedené definice je mocnina s racionálním exponentem definovaná pouze pro kladný základ.

[2]Za tento způsob odvození patří poděkování studentu Martinu Nebeskému.

Úkol pro dlouhé zimní večery. Ukažte, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí $a^{q_1+q_2} = a^{q_1} a^{q_2}$.

NÁVOD. Je třeba ukázat, že pro přirozená čísla p, q, r, s platí $\sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$, a $\sqrt[q]{a^p}/\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}}$.

Úkol pro dlouhé zimní večery. Ukažte, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ platí $a^{q_1 q_2} = (a^{q_1})^{q_2}$.

NÁVOD. Je třeba ukázat, že pro přirozená čísla p, q, r, s platí $\sqrt[qs]{a^{pr}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$, a $1/\sqrt[qs]{a^{pr}} = \sqrt[s]{\left(1/\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$.

Důsledek. Vztah (10.1) platí i pro racionální exponenty.

10.2 Exponenciální funkce

Terminologická poznámka. Mocninná funkce má proměnný základ a konstantní exponent, například $x \mapsto x^2$. Funkci, která má konstantní základ a proměnný exponent nazýváme *exponenciální funkcí.*

V článku 10.1 jsme v (10.2) definovali hodnotu exponenciální funkce pro racionální exponent. Zbývá odpovědět na následující otázku.

Otázka. Jak je definováno $2^{\sqrt{2}}$? Obecněji: jak je definována mocnina s iracionálním exponentem?

Odpověď, kterou dostávám od studentů: pomocí logaritmů. Protože je $\ln 2^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln 2$, je $2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 2}$. Tím jsme převedli výpočet $2^{\sqrt{2}}$ na výpočet $e^{\sqrt{2}\ln 2}$, ale na otázku o mocnině s iracionálním exponentem jsme neodpověděli. Jen jsme převedli jednu mocninu s iracionálním exponentem na jinou.

Lepší odpověď: odmocninu ze dvou můžeme přibližně nahradit racionálním číslem, například postupně zpřesňujícím se desetinným rozvojem odmocniny: 1.4, 1.41, 1.414, ... a tedy odmocninu ze dvou můžeme postupně vyjádřit přibližně jako $2^{1.4} = \sqrt[5]{2^7}$, $2^{1.41} = \sqrt[100]{2^{141}}$, ...

Jinými slovy funkci $x \mapsto 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ dostaneme jako spojité rozšíření funkce $q \mapsto 2^q$, $q \in \mathbb{Q}$.

Druhá limita snadno plyne po substituci $y = -x$ a použití $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ z věty o limitě podílu

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{y\to+\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\exp(y)} = 0$$

8. **Obor Hodnot.** Z 7 a 4 plyne, že oborem hodnot exponenciální funkce je interval $(0, +\infty)$.

10.3 Logaritmické funkce

O exponenciální funkci exp víme

1. Její definiční obor je $\mathbb{R}$.
2. Je rostoucí (na svém definičním oboru).
3. Její obor hodnot je $(0, +\infty)$.

Odtud plyne existence inverzní funkce s definičním oborem $(0, +\infty)$ a oborem hodnot $\mathbb{R}$. Tuto inverzní funkci nazýváme logaritmem, značíme log. Na rozdíl od školské matematiky, kde je tímto symbolem značen dekadický logaritmus, my budeme takto značit přirozený logaritmus.[6]

Definice logaritmu. Kořen $x \in \mathbb{R}$ rovnice $\exp(x) = y$ nazýváme logaritmem čísla y. Značíme $x = \log y$.

Poznámky.
Obor hodnot exponenciální funkce je $(0, +\infty)$, proto je logaritmus definován pro kladné argumenty.[7]
Exponenciální funkce je rostoucí a tedy prostá, proto k $y > 0$ existuje právě jedno x splňující rovnici $\exp(x) = y$. Logaritmus je tedy definován jednoznačně a je funkcí.

Pomocí logaritmu definujeme exponenciální funkci s obecným základem. Pro $a > 0$ definujeme

$$a^x = \exp(x \log(a)) \tag{10.8}$$

[6]V matematické literatuře se dekadický logaritmus v podstatě nevyskytuje a je tam námi používané značení běžné.

[7]Argumentem logaritmu rozumíme výraz, který logaritmujeme. Např. argumentem $\log(2x - 1)$ je výraz $2x - 1$. Podobně ve výrazu $\sin 2x$ je $2x$ argumentem sinu.

10.2.6 Vlastnosti exponenciální funkce

Vyslovíme několik vlastností exponenciální funkce a ukážeme, jak plynou z (10.4), (10.5).

1. **Nezápornost** plyne z $\exp(x) = \exp(x/2+x/2) = \exp(x/2)\exp(x/2) \geq 0$.

2. **Kladnost.** Pokud by pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ platilo $\exp(x) = 0$, pak by pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ platilo $\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x) = 0$. Pak by, ale nemohlo platit (10.5). Funkce je tedy nejen nezáporná, ale dokonce kladná.

3. **Monotonie.** Z $\exp' = \exp$ a bodu 2 plyne kladnost derivace $\exp'$ a odtud plyne, že je exp rostoucí na svém definičním oboru (tedy $\mathbb{R}$).

4. **Spojitost.** Z existence konečné derivace plyne spojitost.

5. **Hodnota v nule.** Z $\exp(x+0) = \exp(x)\exp(0)$ a z $\exp(x) \neq 0$ plyne $\exp(0) = 1$.
   Odtud a z monotonie funkce exp plyne: pro $x < 0$ je $\exp(x) < 1$ a pro $x > 0$ je $\exp(x) > 1$ (tyto vztahy použijeme hned v další vlastnosti).

6. **Graf leží nad tečnou v bodě nula.** Tato vlastnost je vyjádřena grafem v kapitole 10.2.1 a následující nerovností

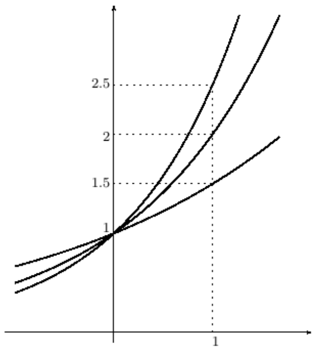
   $$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq 1 + x) \tag{10.7}$$

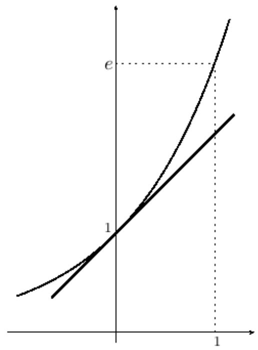
   Nerovnici přepíšeme do tvaru $\exp(x) - x - 1 \geq 0$. Funkce $g(x) = \exp(x) - x - 1$ má derivaci rovnu $g'(x) = \exp(x) - 1$, a tedy je $g'(x)$ kladná pro $x > 0$ a záporná pro $x < 0$ (viz o bod výše). Odtud plyne, že g je rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty, 0)$. Má tedy v bodě nula minimum a to je rovno $g(0) = \exp(0) - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

7. **Limity v nekonečnech.** Ukážeme, že limita exponenciální funkce v plus nekonečnu se rovná plus nekonečnu.
   Použijeme vztah (10.7), fakt, že funkce $x \mapsto x+1$ má v plus nekonečnu limitu rovnu plus nekonečnu a obdobu policejní věty pro nevlastní limitu – graficky v 10.2.1.
   Ukázali jsme tedy

   $$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

10.2.1 Eulerovo číslo





Na levém obrázku jsou grafy exponenciálních funkcí s různými základy. Všechny protínají osu y v bodě $[0, 1]$, ale pod různým úhlem. Eulerovo číslo $e \doteq 2.718$ se vyznačuje tím, že graf protíná osu y pod úhlem $\pi/4$.

Přímka vyznačená na obrázku o rovnici $y = x + 1$ je tečnou grafu, což vyjádříme pomocí limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad (10.3)$$

10.2.2 Funkcionální rovnice

Z [2] přebíráme definici:

Definice exponenciální funkce. Funkci exp splňující následující dvě podmínky nazýváme exponenciální funkcí, někdy též exponenciálou.

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)) \qquad (10.4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1 \qquad (10.5)$$

Poznámky.
Vztah (10.4) splňuje exponenciální funkce s libovolným základem $a > 0$. Napíšeme-li a^x místo $\exp(x)$, pak bude $a^y = \exp(y)$, $a^{x+y} = \exp(x + y)$ a (10.4) bude mít tvar $a^{x+y} = a^x a^y$.
Podmínka (10.5) má v definici exponenciály dva významy: jednak zaručí spojitost a za druhé vybere mezi exponenciálními funkcemi tu, která má za základ Eulerovo číslo.
Rovnici (10.4) nazýváme funkcionální rovnicí. Můžeme se na ni dívat jako na rovnici, ve které je neznámou funkce exp. V kapitole 10.2.6 ukážeme, jak lze z této funkcionální rovnice odvodit vlastnosti funkce exp.

Značení. Ve shodě s matematickou literaturou budeme exponenciální funkci značit symbolem exp, tedy místo e^x budeme psát $\exp(x)$ případně $\exp x$.

Poznámka o Eulerovu číslu. Ve [2] je důkaz existence funkce splňující (10.4), (10.5) a tento důkaz používá funkci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \tfrac{x}{n})^n \tag{10.6}$$

Odtud plyne $f(1) = \lim(1 + 1/n)^n$, a tedy $e = \lim(1 + 1/n)^n$. Pokud čtenáře zajímá, odkud se vzal vztah (10.6), odkazujeme jej na lemma 6.3.5 a poznámku 6.3.10 v [2].

10.2.3 Aditivní a homogenní zobrazení

Z lineární algebry znáte pojem lineárního zobrazení. Připomeneme, že je to zobrazení mezi vektorovými prostory $L : V_1 \to V_2$ splňující

1. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1)(L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{u}))$
   tuto vlastnost nazýváme aditivitou

2. $(\forall \mathbf{u} \in V_1)(\forall \alpha \in \mathbb{R})(L(\alpha\mathbf{u}) = \alpha L(\mathbf{v}))$
   tuto vlastnost nazýváme homogenitou

My se zde omezíme na jednorozměrné vektorové prostory, tedy $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$. Aditivita $(\forall x, y \in \mathbb{R})(L(x + y) = L(x) + L(y))$ připomíná (10.1), případně (10.4). Plyne z ní pro racionální q a reálné x vztah $L(qx) = qL(x)$, tedy skoro homogenita. Je tedy přirozené položit si otázku, zda existují zobrazení, která jsou aditivní, ale nejsou homogenní.

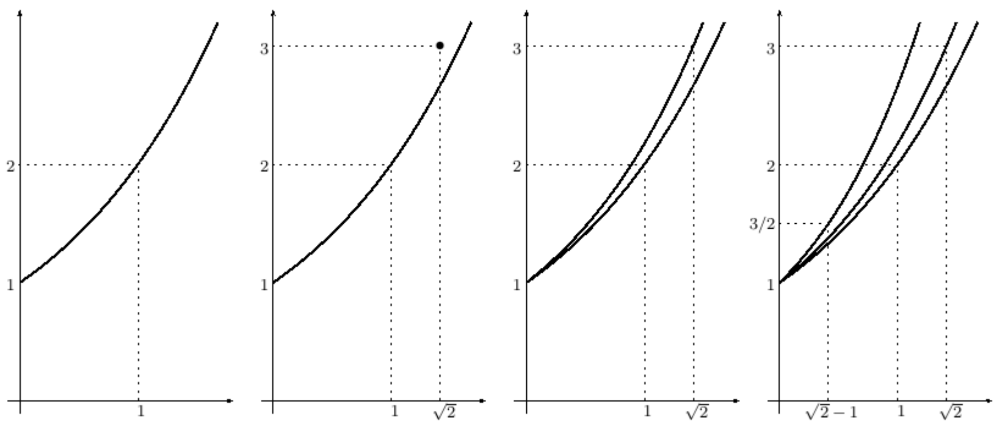
Odpověď je následující:[3] pokud je zobrazení L spojité, tak z aditivity plyne homogenita. Nehomogenní aditivní zobrazení tedy nemůže být spojité. Dá se ukázat, že jeho graf hustě [4] vyplní celou rovninu.

10.2.4 Nespojitá rozšíření exponenciální funkce

Ukážeme, jak by vypadal graf exponenciální funkce, kdybychom ji z $\mathbb{Q}$ rozšířili na $\mathbb{R}$ jinak než spojitě a stále požadovali splnění (10.4). V celém článku 10.2.4 značí q racionální číslo.

[3] Naše úvaha a na ní založené tvrzení se týká vektorových prostorů nad tělesem reálných čísel.

[4] Myslíme tím, že v každém sebemenším čtverečku se nachází alespoň jeden bod grafu.



Na levém grafu je funkce $f : q \mapsto 2^q$. Na druhém grafu zleva je funkce f rozšířena hodnotou 3 v bodě $x = \sqrt{2}$. Odtud lze, podobně jako v článku 10.1, odvodit rozšíření v bodech $x = q\sqrt{2}$ hodnotami $3^q = 3^{x/\sqrt{2}}$ – graf vidíte na třetím obrázku.

Z $f(1) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 3$ a z (10.4) plyne $f(\sqrt{2} - 1)f(1) = f(\sqrt{2})$, a tedy $f(\sqrt{2}-1) = f(\sqrt{2})/f(1) = 3/2$ a odtud (podobně jako v 10.1) $f(q(\sqrt{2}-1)) = (3/2)^q$, a to je znázorněno na grafu vpravo.

Podobně bychom mohli pokračovat pro $m\sqrt{2} + n$ s celočíselnými m, n a dostali bychom graf, který je hustý[5] v horní polorovině.

V [2] jsou úvahy o nespojitém rozšíření v oddílu o aditivních funkcích v poznámce 6.2.7.

10.2.5 Derivace exponenciální funkce

Odvodíme vzorec pro derivaci $\exp'$

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

Úpravou $\exp(x+h) = \exp(x)\exp(h)$ a vytknutím $\exp(x)$ dostaneme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h} = \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \cdot 1 = \exp(x)$$

Poznámka. Limita $\lim_{h\to 0}(\exp(h) - 1)/h$ je rovna derivaci exponenciální funkce v nule a jak jsme viděli v 10.2.1 znamená, že graf exponenciální funkce protíná osu y pod úhlem $\pi/4$.

[5] Podobně jako u aditivního zobrazení tím myslíme, že v každém sebemenším čtverečku se nachází alespoň jeden bod grafu.