Kapitola 13

Řady

Řada je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Navíc se v jiných oborech používá pojem *časová řada* ve smyslu posloupnosti. Studentům se tyto pojmy hodně pletou, přestože se už na střední škole setkali s pojmy *geometrická posloupnost*, *geometrická řada*, *aritmetická posloupnost*, *aritmetická řada*. Proto je potřeba si „vtlouci“ do hlavy, že geometrická posloupnost je například $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ zatímco geometrická řada je například $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$, tedy součet.

Výklad začneme desetinným rozvojem reálných čísel a převedením periodického rozvoje na zlomek. Pak uvedeme základní pojmy a prozkoumáme geometrickou řadu. Poté se pustíme do pro začátečníka náročnější látky: uvedeme kritéria, která nám pomůžou určit, zda daná řada má konečný součet (nazýváme ji konvergentní). Užitečnost této znalosti demonstrujeme v kapitole 13.4, kde dostaneme přirozenými, ale nekorektními manipulacemi nesprávné závěry pro nekonvergentní řady. V závěru kapitoly pojednáme o dalším nebezpečí při manipulaci s nekonečnými součty – ukážeme, že přerovnáním pořadí členů se součet nezmění v případě absolutně konvergentní řady, ale obecně se změnit může. V úplném závěru ukážeme několik příkladů nekonečných řad, pro které známe jejich součet.

13.1 Desetinný rozvoj jako součet nekonečné řady

Desetinný rozvoj libovolného reálného čísla je v podstatě nekonečný součet, ukážeme na čísle π

$$\pi = 3.1415\ldots = 3 + 1/10 + 4/100 + 1/1000 + 5/10^4 + \cdots$$

Jako další příklad si vybereme periodický rozvoj

$$a = 2.\overline{21} = 2.2121\ldots = 2 + 21/10^2 + 21/10^4 + \cdots$$

Naším cílem je vyjádřit číslo a jiným způsobem. Všimneme si, že $100a$ má kromě několika cifer stejný rozvoj jako a

$$100a = 221.\overline{21}$$

a pro rozdíl tedy platí

$$100a - a = 221.\overline{21} - 2.\overline{21} = 219$$

Úpravou dostaneme

$$a = \frac{219}{99}$$

Dostali jsme podíl dvou přirozených čísel, který převedeme do základního tvaru

$$a = \frac{73}{33}$$

Podobným způsobem lze na podíl převést každý periodický rozvoj.

Periodický rozvoj můžeme vyjádřit ještě jiným způsobem. Zvolíme stejné a jako nahoře

$$a = 2.\overline{21} = 2 + 21/10^2 + 21/10^4 + 21/10^6 + \cdots + 21/10^{2k} + \cdots$$

Pomocí sumačního symbolu můžeme tento rozvoj zapsat

$$a = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 21/10^{2k} \tag{13.1}$$

V kapitole 13.4 součet řady (13.1) spočítáme, výsledek pochopitelně očekáváme stejný jako výše uvedený.

13.12 Pro gamblery

Zahrajte si hru: Házejte kostkou a pokaždé když nehodíte šestku, dostanete od ptotihráče žeton (pod žetonem si představte cokoliv, o co jste ochotni hrát). Hra končí, až padne šestka. Před započetím hry odevzdáte protihráči určitý počet žetonů, na tomto počtu se dohodnete.

Úkolem je určit, jak velká žetonová vstupenka do hry se vám vyplatí. Asi vás nepřekvapí, když prozradíme, že k výpočtu se hodí látka v právě probrané kapitole.

13.2 Základní pojmy

Definice. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme (nekonečnou číselnou) *řadou.*
Čísla a_k nazýváme *členy* řady.
Číslo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazýváme *n-tým částečným součtem* řady a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupností částečných součtů* řady.
Má-li posloupnost částečných součtů limitu $s \in \mathbb{R}^*$, pak říkáme, že má řada součet a s nazýváme *součtem řady.*
Pokud je součet řady konečný, říkáme, že řada *konverguje.*
Pokud je součet řady nekonečný, říkáme, že řada *diverguje.*
V případě, že řada součet nemá, není terminologie úplně jednotná – proto raději budeme říkat, že nemá součet. Někteří používají termín oscilující řada, někteří divergentní řada.

Příklady.

1. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k$ má členy $a_k = k$, částečné součty

   $$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + 2 = 3, \quad s_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \quad \ldots$$

   Použitím vzorce pro součet konečné aritmetické řady dostaneme

   $$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

   a odtud součet řady

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}n(n+1) = \infty$$

   Řada tedy nekonverguje, diverguje.

2. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ má členy -1, 1, částečné součty

   $$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad \ldots$$

   Částečné součty jsou pro liché n rovny -1 a pro sudé n rovny nule. Součet řada nemá, osciluje.

3. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ má členy $\frac{1}{2^k}$, částečné součty

$$s_1 = \tfrac{1}{2}, \quad s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \quad s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8}, \quad \ldots$$

Všimneme si, že $s_3 = 1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{2}{16}$, odkud dostaneme $s_4 = s_3 + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$. Podobně odvodíme $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, odkud lze odvodit součet řady

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \tfrac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Řada tedy konverguje a má součet roven jedné.

4. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ má částečné součty

$$s_n = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) = 1 - \tfrac{1}{n+1}$$

a součet

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \tfrac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

Řada tedy konverguje a má součet roven jedné.

Poznámky.

1. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ značí jednak řadu (i když nemá součet) a také její součet (má-li ho).

2. Řada může začínat i jiným indexem než $k = 1$. Například geometrickou řadu $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ lze zapsat ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

a geometrickou řadu (13.4) ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 q^k$$

3. Změníme-li *konečný* počet členů řady, pak se pravděpodobně změní její součet, ale nezmění se to, zda řada konverguje a zda má součet: Je-li

Další příklady získáme derivováním nebo integrováním mocninné řady člen po členu. Poznamenejme, že tato operace vypadá jako použití pravidla pro derivaci součtu, ale protože je součet nekonečný jde o výměnu pořadí limit, která není vždy korektní. Pro speciální případ mocninných řad korektní je: Vztah $(\sum f_k(x))' = \sum f_k'(x)$ pro nekonečné součty nemusí platit, ale ve speciálním případě mocninných řad platí na kruhu konvergence (věta 8.3.10 v [2]).

5. Derivováním geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ člen po členu pro $x \in (-1,1)$ dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

6. Alternativní výpočet 5: řadu $\sum_{k=1} kx^k$ vyjádříme jako součet geometrických řad $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} x^k$, sečtením dostaneme zase geometrickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x}$, jejíž součet je $\frac{x}{(1-x)^2}$.

7. Pro $x \in (-1,1)$ máme (součet geometrické řady)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Zintegrováním mocninné řady člen po členu dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x) + C$$

Hodnotu konstanty C získáme dosazením $x = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k} = -\log(1-0) + C$$

a tedy $C = 0$. Odtud dostáváme vztahy platné pro $x \in (-1,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \log(1+x)$$

Z Abelovy věty [3] plyne platnost i pro $x = 1$, tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

5. Rozmyslete si, že z 2, 4 plyne

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{q!q}$$

6. Ukažte, že pro $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \in (0,1)$$

13.11 Řady, které umíme sečíst

Uvedeme, většinou bez důkazů, příklady řad, které umíme sečíst.

1. Geometrická řada: pro $q \in (-1,1)$ je $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$.

2. U některých řad je snadné spočítat částečné součty: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, a tedy i součet.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, důkaz v [4] používá funkci komplexní proměnné, její Laurentův rozvoj (zobecnění Taylorova polynomu) a výpočet křivkového integrálu. V úvodu [2] je tento součet odvozen z Taylorovy řady funkce sinus a „zobecnění“ vztahu mezi kořeny polynomu a jeho koeficienty na mocninné řady.

4. Víme, že $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, odvodili jsme to odhadem zbytku Taylorova polynomu. Podobně se dá ukázat pro $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

$a_k = b_k$ pro $k \geq N$, pak pro $n \geq N$ je (podrobnosti v následujícím cvičení)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

a odtud

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Proto při zkoumání konvergence řady nemusíme psát meze pro sčítací index k a nevadí nám, že například členy řady $\sum \frac{1}{k(k-1)(k-2)}$ nejsou pro $k \in \{0, 1, 2\}$ definovány.

Cvičení. Ukažte, že pro řady $\sum a_k$, $\sum b_k$, které mají od indexu $k = N$ stejné členy, tedy pro $k \geq N$ je $a_k = b_k$, platí pro $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

NÁVOD. Pro obě řady platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k$$

a dále platí

$$\sum_{k=N+1}^{n} a_k = \sum_{k=N+1}^{n} b_k$$

Další příklady.

1. *Harmonická* řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

má rostoucí posloupnost částečných součtů[1]

$$s_{n+1} = s_n + \tfrac{1}{n+1} > s_n$$

a má proto součet

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Ukážeme, že $s = +\infty$. Odhady

$$\begin{array}{rcl} \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} & > & \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8} & > & \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2} \\ & \vdots & \end{array}$$

dají

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \tfrac{1}{k} > 1 + \tfrac{n}{2}$$

a odtud plyne, že součet harmonické řady je $+\infty$.

2. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k$ má částečné součty

$$\begin{array}{rcl} s_{2n} & = & -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots + 2n = n \\ s_{2n+1} & = & s_{2n} - (2n+1) = n - (2n+1) = -n - 1 \end{array}$$

Součty sudého počtu členů se blíží k plus nekonečnu, zatímco součty lichého počtu členů k mínus nekonečnu, řada tedy nemá součet, osciluje.

3. Při zkoumání řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ se hodí rozložit její členy na součet parciálních zlomků: $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ a použít příklad 4 výše

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1}\right) = \\ & = & 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} = 1 - \tfrac{1}{n+1} \\ s & = & \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 \end{array} \tag{13.2}$$

[1] To platí pro každou řadu s kladnými členy, více viz kapitola 13.6.

13.10.3 Eulerovo číslo je iracionální

Předpokládejme, že je Eulerovo číslo racionální, a tedy existují $p, q \in \mathbb{N}$ taková, že $e = \frac{p}{q}$. Použijeme (13.13) k vyjádření součinu $q!\, e$, o kterém z našeho předpokladu plyne $q!\, e \in \mathbb{N}$.

Součet na pravé straně

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

rozdělíme na dvě části a v následujících úlohách ukážeme, že první část má celočíselnou hodnotu a druhá má hodnotu z intervalu $(0, 1)$. Odtud dostáváme spor s tvrzením $q!\, e \in \mathbb{N}$.

$$q!\, e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

Úkoly.

1. Ukažte, že pro $k \leq q$ je $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

2. Ukažte, že pro $k > q$ je

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{q!(q+1)\cdots k} \leq \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

   Návod: v součinu $(q+1)\ldots k$ nahraďte všechny činitele výrazem $q+1$. Je jich tam $k - q$ (z k činitelů $1 \cdot 2 \cdots k$ vypustíme prvních q).

3. Ukažte, že následující řada je geometrická a vypočtěte její kvocient.

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

4. Ukažte, že následující řada je konvergentní a vypočtěte její součet

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{q!(q+1)^{k-q}}$$

   Návod: dosaďte do vzorce pro součet nekonečné geometrické řady a upravte.

Z (13.15) dostaneme nahrazením závorek jedničkami nerovnost

$$(1+\tfrac{1}{n})^n < \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} \tag{13.16}$$

a odtud limitním přechodem

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \le \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

Ukážeme opačnou nerovnost. Nabízí se v (13.15) udělat limitní přechod pro $n \to \infty$. Nemáme ale nástroj na úpravu limity součtu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n})\right)$$

na součet limit

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\right)+\cdots+\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n})\right),$$

protože se počet sčítanců na pravé straně s rostoucím n zvětšuje.

Proto zvolíme $N \in \mathbb{N}$ a součet v (13.15) ukončíme pro $n > N$ u členu $\frac{1}{N!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{N-1}{n})$ a dostaneme (pro $n > N$)

$$(1+\tfrac{1}{n})^n \ge 1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{N!}(1-\tfrac{1}{n})\ldots(1-\tfrac{N-1}{n}) \tag{13.17}$$

Nyní můžeme v (13.17) provést limitní přechod pro $n \to \infty$ a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{N} \tfrac{1}{k!}$$

a odtud dalším limitním přechodem pro $N \to \infty$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}$$

Poznámka. U řady v příkladu 2 lze zjistit, že nekonverguje už z toho, jak vypadají její členy s velkými indexy – nesplňují podmínku v následujícím lemmatu. Má-li mít řada konečný součet, musí mít posloupnost jejích členů nulovou limitu:

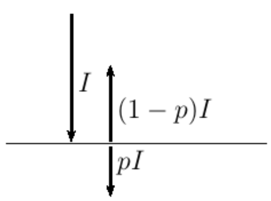
Lemma – nutná podmínka konvergence. Je-li řada $\sum a_k$ konvergentní, má posloupnost jejích členů nulovou limitu: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

DŮKAZ. Ze vztahu $s_n = s_{n-1} + a_n$ vyjádříme $a_n = s_n - s_{n-1}$ a z konvergence řady plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$ – obě limity jsou rovny součtu řady. □

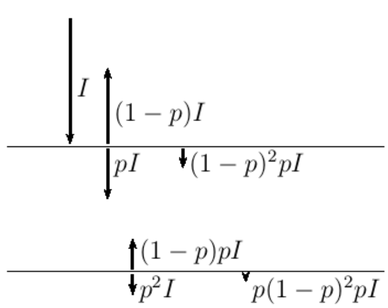
Poznámka. Říkáme, že podmínka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ je nutná podmínka konvergence řady. Z její neplatnosti plyne, že řada není konvergentní – například řada $\sum_{K=1}^{\infty} 2^k$ řada z příkladu 2. Z její platnosti neplyne nic – například harmonická řada tuto podmínku splňuje, ale není konvergentní.

13.3 Geometrická řada

Příklad.[2]



Vodorovná čára na obrázku znázorňuje sklo o propustnosti dané číslem $p \in (0,1)$. Z dopadajícího světla intenzity I projde světlo o intenzitě pI a odrazí se světlo o intenzitě $(1-p)I$.



Na dalším obrázku jsou skla dvě a naším cílem je zjistit, kolik světla projde přes obě skla. Přímo, tj. bez odrazu zpět, projde p^2I. Zpět se od druhého skla odrazí $(1-p)pI$ a po dalším odraze na horním skle $(1-p)^2pI$. Po tomto jednom zpětném odrazu pak přes dolní sklo přejde $(1-p)^2p^2I$.

Po dvojnásobném zpětném odrazu pak projde $(1-p)^4p^2I$ a po k-násobném

[2] Za příklad děkuji kolegovi Filipu Soudskému.

odrazu projde $(1-p)^{2k}p^2 I$. Celkem přes obě skla projde světlo o intenzitě

$$p^2 I + p^2(1-p)^2 I + p^2(1-p)^4 I + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p^2(1-p)^{2k} I$$

Dostali jsme nekonečnou geometrickou řadu. V dalších kapitolách odvodíme vzorec pro její součet a poté se k příkladu vrátíme.

13.3.1 Konečná geometrická řada

Podíl sousedních členů a_{k+1}/a_k geometrické řady nezávisí na indexu k. Tento podíl nazýváme kvocientem geometrické řady a zpravidla značíme q. Člen a_{k+1} pak pomocí kvocientu a předchozího členu vyjádříme

$$a_{k+1} = a_k q$$

Pomocí prvního členu pak lze další členy vyjádřit ve tvaru

$$a_k = a_1 q^{k-1} \tag{13.3}$$

Dokážeme vztah (13.3) matematickou indukcí:
$k = 1$: $a_1 = a_1 q^{1-1}$ platí
Indukční krok: předpokládáme, že tvrzení platí pro k a dokážeme jeho platnost pro $k+1$. Do vztahu $a_{k+1} = a_k q$ dosadíme indukční předpoklad (13.3). Dostaneme

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k,$$

což je vztah (13.3) pro $k+1$. $\square$[3]

Řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} \tag{13.4}$$

nazýváme *nekonečnou geometrickou řadou.* Její částečný součet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} \tag{13.5}$$

konečnou geometrickou řadou.

[3] Takto označujeme konec důkazu.

13.10 Eulerovo číslo

Ukážeme, že základ přirozených logaritmů, Eulerovo číslo e, je roven součtu řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ a limitě $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

13.10.1 Eulerovo číslo jako součet řady

Použijeme Taylorův polynom exponenciální funkce $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$. Pro $x = 1$ dostáváme $T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ a pomocí Lagrangeova zbytku Taylorova polynomu

$$e = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} + \tfrac{1}{(n+1)!} \exp(c_n) \tag{13.12}$$

O čísle c_n víme $c_n \in (0,1)$, proto

$$1 < \exp(c_n) < e$$

a

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{\exp(c_n)}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

Použitím věty o sevřené limitě odtud dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{(n+1)!} \exp(c_n) = 0$$

a odtud limitním přechodem v (13.12)

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \tag{13.13}$$

13.10.2 Eulerovo číslo jako limita posloupnosti

Ukážeme obě nerovnosti $(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, $(1+\frac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Odtud pak plyne

$$e = \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n \tag{13.14}$$

Úloha. Použitím binomické věty a následnou úpravou ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = 1+1+\tfrac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{1}{3!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})+\cdots+\tfrac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})\cdots(1-\tfrac{n-1}{n}) \tag{13.15}$$

DŮKAZ. Nechť je $\sum a_k$ absolutně konvergentní řada. Uvažujme řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$. Z konvergence řad $\sum |a_k|$, $\sum a_k$ plyne konvergence řad s nezápornými členy

$$\sum a_k^+ = \sum (a_k + |a_k|)/2 \qquad \sum a_k^- = \sum (a_k - |a_k|)/2.$$

Přerovnejme podle posloupnosti indexů $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ obě řady – dostaneme řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^+$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^-$ – mají stejný součet jako před přerovnáním. Z nich pak dostaneme přerovnanou řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}^-$$

se součtem stejným jako řada $\sum a_k$. □

Poznámka o součinu řad. Součin řad $s = (\sum a_k)(\sum b_k)$ se nabízí napsat jako dvojnou sumu $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_k b_l$ (pro konečné řady ji získáme roznásobením – distributivním zákonem). Je otázka, zda má tato „dvojná“ řada součet a zda je roven součinu s. Odpověď zní ano pro absolutně konvergentní řady a součin často zapisujeme v tzv. *Cauchyově tvaru* $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

13.9.2 Přerovnání neabsolutně konvergentní řady

V případě neabsolutně konvergentní řady se přerovnáním může její součet změnit, nebo můžeme dostat řadu, která součet nemá. V následující větě ukážeme, že dokonce součet může nabývat jakékoliv hodnoty.

Věta. Nechť $\sum a_k$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak pro libovolné $S \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání řady $\sum a_k$ na řadu se součtem S.

HLAVNÍ MYŠLENKY DŮKAZU. Použijeme značení a^+, a^- z článku o přerovnání absolutně konvergentní řady. Obě řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ mají limitu $+\infty$. Je-li S konečné kladné, začneme s kladnými členy řady, dokud nebude částečný součet větší než S. Je-li S konečné záporné, začneme se zápornými členy řady, dokud nebude částečný součet menší než S. Pak budeme vždy brát střídavě potřebné množství kladných/záporných členů, abychom se s částečným součtem dostali nad/pod S (řady $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ mají nekonečný součet, proto nám slouží jako hrneček v pohádce hrnečku vař). Zbývá ukázat, že takto sestrojená řada má součet a ten je roven S.

Je-li $S = +\infty$, budeme postupovat podobně – budeme se postupně dostávat nad 1, pod 1, nad 2, pod 2, …, nad k, pod k, ….

Podobně pro $S = -\infty$. □

Odvodíme vzorec pro součet s_n. Vztah (13.5) vynásobíme kvocientem

$$qs_n = q\sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^k = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$$

odečteme od vztahu (13.5) a upravíme

$$\begin{aligned} s_n - qs_n &= a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} - (a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n) \\ &= a_1 - a_1 q + a_1 q - a_1 q^2 + a_1 q^2 - \cdots - a_1 q^{n-1} + a_1 q^{n-1} - a_1 q^n \\ &= a_1 - a_1 q^n = a_1(1 - q^n) \end{aligned}$$

Dostaneme pro $q \neq 1$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

a pro $q = 1$

$$s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n\times} = na_1$$

$\square$[4]

Závěr: Součet konečné geometrické řady je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{pro } q \neq 1 \\ na_1 & \text{pro } q = 1 \end{cases} \tag{13.6}$$

13.3.2 Nekonečná geometrická řada

Naším dalším cílem je odvodit vzorec pro součet nekonečné geometrické řady

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ pro } q \neq 1 \tag{13.7}$$

Pro $q = 1$ dostáváme řadu s konstantními členy se součtem $\pm\infty$ v závislosti na znaménku prvního členu.

K výpočtu limity v (13.7) potřebujeme určit limitu

$$\lim_{n\to\infty} q^n$$

[4]Označuje i konec odvození.

Pro $q > 0$ použijeme exponenciálu k vyjádření $q^n = \exp(n \log(q))$. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \exp(n\log(q)) = \begin{cases} \lim_{y\to-\infty} \exp(y) = 0 & \text{pro } q < 1 \\ \lim_{y\to+\infty} \exp(y) = +\infty & \text{pro } q > 1 \end{cases}$$

Pro $q \in (-1, 0)$ je $|q| \in (0, 1)$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0$$

odkud i

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Stejná limita vyjde i pro $q = 0$. Pro $q \leq -1$ poslopnost $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ osciluje (mezi kladnými a zápornými členy v absolutní hodnotě většími než jedna).

Závěr.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } q \in (-1, 1) \\ = +\infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Dosazením do (13.7) dostaneme *součet nekonečné geometrické řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & \text{pro } q \in (-1, 1) \\ = +\infty \operatorname{sgn}(a_1) & \text{pro } q \geq 1, a_1 \neq 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases} \tag{13.8}$$

Pro speciální případ $a_1 = 1$ a po posunutí indexů dostaneme:
Geometrická řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $q \in (-1, 1)$ se součtem $s = \frac{1}{1-q}$. Pro $q \geq 1$ má součet $s = +\infty$, tedy diverguje. Pro $q \leq -1$ nemá součet, osciluje.

Poznámka. Nutná podmínka konvergence 13.2 je v případě geometrické řady podmínkou nutnou a postačující.

Příklady.

1. Dokončení příkladu 13.1: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} 21/10^{2k}$ je geometrická s prvním členem $21/100$ a kvocientem $1/100$. Má tedy součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} 21/10^{2k} = \frac{21/100}{1 - 1/100} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

Označíme součty řad

$$\begin{aligned} s &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k : n \in \mathbb{N}\right\} \\ r &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k : n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

a budeme předpokládat $s \neq r$, tedy, že dokazované tvrzení neplatí a odvodíme spor. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $s < r$ (jinak vyměníme roli řad, původní je také přerovnání té přerovnané). Označíme částečné součty

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Dle našeho předpokladu je s menší než r, supremum množiny částečných součtů r_n, proto existuje $n \in \mathbb{N}$, že $r_n > s$.
Uvažujme pro toto r_n členy částečného součtu $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ a částečný součet původní řady

$$s_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

který je všechny obsahuje. Pak je $r_n \leq s_N$. Zároveň je s supremum množiny částečných součtů s_n, tedy $s_N \leq s$, což je ve sporu s dříve odvozenými $s < r_n$ a $r_n \leq s_N$.
TODO: dokreslete obrázek – číselnou osu a na ní body r, s, r_n, s_N. $\square$

Před důkazem věty o přerovnání absolutně konvergentní řady zavedeme značení: a^+ pro kladnou část čísla a, a^- pro zápornou část čísla a. Například $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $-3^+ = 0$, $-3^- = 3$. Obecně

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ 0 & \text{pro } a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0 & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a \leq 0 \end{cases}$$

V dalším budeme používat vztahy $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a z nich odvozené vztahy $a^+ = (a + |a|)/2$, $a^- = (a - |a|)/2$.

Věta o přerovnání absolutně konvergentní řady. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je absolutně konvergentní řada a řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ je jejím přerovnáním. Pak je i přerovnaná řada absolutně konvergentní a řady mají stejný součet.

dostali úpravami řadu (zde z ní vypouštíme nulové členy)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

se stejnými členy, ale v jiném pořadí.

Budeme říkat, že druhá řada vznikla z první přerovnáním – níže uvádíme definici.

Definice. Nechť $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel, která každé přirozené číslo obsahuje právě jednou (posloupnost indexů přerovnané řady). O řadě $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i}$ řekneme, že je *přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Příklad. Výše uvedené přerovnání odpovídá posloupnosti $1, 3, 2, 5, 7, 4, \ldots$.

Pro posloupnost $2, 1, 4, 3, 6, \ldots$ dostaneme z řady $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots$ přerovnáním řadu $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + \cdots$.

Obecně se při přerovnání řady může změnit její součet, nebo dokonce přerovnaná řada nemusí mít součet. V následujících článcích rozebereme, jak tato vlastnost souvisí s absolutní konvergencí řady.

13.9.1 Přerovnání absolutně konvergentní řady

Nejdříve ukážeme, že řada s nezápornými členy nezmění svůj součet při přerovnání. Poté totéž ukážeme pro absolutně konvergentní řadu.

Lemma o přerovnání řady s nezápornými členy. Nechť je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ řada s nezápornými členy a řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je jejím přerovnáním. Pak řady mají stejný součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Důkaz. Posloupnosti částečných součtů řad s nezápornými členy jsou neklesající, proto mají limitu a tato limita je rovna supremu částečných součtů těchto řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Odtud dostaneme

$$a = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} 21/10^{2k} = 2 + \frac{7}{33} = \frac{73}{33}$$

výsledek shodný s kapitolou 13.1.

2. Dopočítáme příklad se skly a světlem ze začátku kapitoly. Máme sečíst řadu

$$p^2 I + p^2(1-p)^2 I + p^2(1-p)^4 I + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p^2(1-p)^{2k} I$$

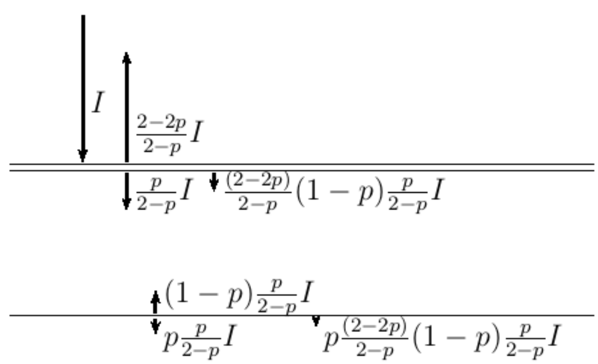
Je to geometrická řada s kvocientem $q = (1-p)^2$, který odpovídá dvěma odrazům a při každém odrazu se intenzita sníží $(1-p)$-krát. Propustnost skla p je číslo z intervalu $(0,1)$, proto i odrazivost $1-p \in (0,1)$. Součet tedy vypočteme dosazením do (13.8)

$$p^2 I + p^2(1-p)^2 I + p^2(1-p)^4 I + \cdots = \frac{p^2 I}{1-(1-p)^2}$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{pI}{2-p}$$

*3 Vypočtěte propustnost trojice skel.



Návod: Dvojici skel lze nahradit jedním sklem s propustností spočítanou výše

$$p/(2-p)$$

a s odrazivostí, která je doplňkem propustností

$$1 - p/(2-p) = \frac{2-2p}{2-p}$$

4. Ukážeme, že je následující řada geometrická a vypočteme její součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^{2k-3}}$$

Spočítáme podíl sousedních členů řady

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{3^{(k+1)+2}}{2^{2(k+1)-3}}}{\frac{3^{k+2}}{2^{2k-3}}} = \frac{3^{(k+1)+2}}{2^{2(k+1)-3}}\frac{2^{2k-3}}{3^{k+2}} = \frac{3^{k+3}}{2^{2k-1}}\frac{2^{2k-3}}{3^{k+2}} = \frac{3}{4}$$

Řada je geometrická, protože podíl sousedních členů se nemění s indexem k. Tento podíl je roven kvocientu geometrické řady, první člen je roven $a_1 = \frac{3^{1+2}}{2^{2-3}} = 54$. Dosazením do (13.8) dostaneme

$$s = \frac{54}{1-3/4} = 216$$

13.4 Varovné příklady

Uvedeme tři příklady, které nás poučí, že s nekonečnými součty musíme zacházet opatrně.

Uvažujme řadu

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{13.9}$$

a vydělme ji člen po členu dvěma

$$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots . \tag{13.10}$$

Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne (odečteme (13.10) od (13.9))

$$\frac{s_1}{2} = s_1 - \frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots . \tag{13.11}$$

A odtud dostaneme odečtením řady (13.10) od řady (13.11)

$$0 = \frac{s_1}{2} - \frac{s_1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ,$$

a tedy součet kladných čísel je roven nule. To je divné, kde se stala chyba?

Uvažujme řadu

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

pak plyne $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ a odtud plyne dokazované tvrzení. $\square$

Příklady.

1. Z konvergence řady $\sum \frac{1}{k^2} = \sum \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right|$ plyne absolutní konvergence řady $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ a odtud její konvergence.

2. Z kapitoly 13.7 o řadách se střídavými znaménky víme, že řada $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konverguje. Z divergence harmonické řady pak víme, že nekonverguje absolutně.

Pro zkoumání absolutní konvergence použijeme kritéria konvergence řad s nezápornými členy.

Věta. Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, je řada $\sum a_k$ absolutně konvergentní.

Důkaz plyne přímo z limitního srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy. $\square$

Věta. Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak řada $\sum a_k$ není konvergentní.

Důkaz je podobný, jako v případě limitního podílového kritéria pro řady s nezápornými členy. Z $|a_k| > |a_K| > 0$ také plyne, že není splněna nutná podmínka konvergence $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. $\square$

Z věty o konvergenci absolutně konvergentní řady plyne: zjistíme-li, že je řada absolutně konvergentní, pak víme, že je konvergentní. A zjistitíme-li, že není konvergentní, pak nemůže být ani absolutně konvergentní. Odtud a z kritérií konvergence máme následující důsledek.

Důsledek.
Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, je řada $\sum a_k$ nejen absolutně konvergentní, ale i konvergentní.

O řadě, která konverguje, ale nekonverguje absolutně, mluvíme někdy jako o neabsolutně konvergentní řadě.

13.9 Přerovnání řad

V úvodu kapitoly jsme z řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Uvedené úvahy lze zobecnit v následující větě.

Věta - Leibnizovo kritérium konvergence pro řady se střídavými znaménky. Nechť je $\{a_k\}$ nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum(-1)^{k+1}a_k$ konverguje právě když splňuje nutnou podmínku konvergence $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. V případě konvergence řady máme pro její součet s a libovolné $n \in \mathbb{N}$ odhad $s \in (s_{2n}, s_{2n+1})$.

Hlavní myšlenky důkazu. Ekvivalenci dokazujeme jako dvě implikace.
Jedna z implikací je zřejmá: je-li řada konvergentní, pak splňuje nutnou podmínku konvergence.
Důkaz opačné implikace je obdobný předchozím cvičením. Ukáže se, že za uvedených předpokladů mají posloupnosti $\{s_{2n}\}$, $\{s_{2n-1}\}$ limitu a ta je rovna limitě posloupnosti $\{s_n\}$. □

13.8 Absolutní konvergence řad

Definice. Řadu $\sum a_k$ nazveme *absolutně konvergentní*, pokud je konvergentní řada $\sum |a_k|$.

Věta o konvergenci absolutně konvergentní řady. Je-li řada $\sum a_k$ absolutně konvergentní, je i konvergentní.

Důkaz. Ukážeme, že je posloupnost částečných součtů $\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\}_{n=1}^\infty$ Cauchyovská – odtud plyne, že je konvergentní.
Zopakujme si definici: posloupnost $\{s_n\}$ je Cauchyovská, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje N takové, že pro $n > m > N$ platí

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^n a_k\right| < \varepsilon.$$

O posloupnosti $\{\sum_{k=1}^n |a_k|\}_{n=1}^\infty$ předpokládáme, že je konvergentní, tedy i Cauchyovská. Proto platí

$$\left|\sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_k|\right| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|\sum_{k=m+1}^n a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^n |a_k|$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s_2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s_2}{2} = s_2 + \frac{s_2}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy a přidanými nulami. Proto platí $s_2 = \frac{3s_2}{2}$. Je to pravda?

Uvažujme geometrickou řadu

$$s_3 = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$

a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s_3}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$

Vidíme, že platí $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$, odkud dostaneme $s_3 = -7$. To je zase divné.

13.5 Základní pravidla manipulací s řadami

V příkladech v kapitole 13.4 byly jediné chybné úvahy v počítání s nekonečny. V prvním příkladu neplatí $s_1 - s_1/2 = s_1/2$ ani $s_1/2 - s_1/2 = 0$, protože $s_1 = +\infty$.

V druhém příkladu jsou kupodivu všechny úpravy korektní kromě závěru. Součet řady se skutečně při přerovnání členů může změnit – blíže tento jev budeme zkoumat v článku o přerovnání řad.

Ve třetím příkladu je vše v pořádku až k rovnici $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$. Při jejím řešení jsme udělali chybu v úpravě $s_3 - \frac{8s_3}{7} = -\frac{s_3}{7}$, protože $s_3 = +\infty$. Všimněte si, že řada je geometrická a stejný výsledek dostaneme, když bez ohledu na podmínky dosadíme první člen a kvocient do vzorce (13.8).

Ukážeme, že všechny ostatní úpravy jsou v pořádku.

Lemma o sčítání řady člen po členu a násobení řady člen po členu. Mají-li řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ součty a, b, a je-li definován součet $a + b$, pak řada, která je jejich součtem člen po členu $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ má součet $a + b$. Je-li definován součin ca, pak má řada $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ součet ca.

DŮKAZ. Tvrzení plyne z věty o limitě součtu:
$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$
a z věty o limitě součinu: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$. □

Poznámky.

1. Pro konvergentní řady je součet $a + b$ a součin ca definován. Součet není definován například pro „$+\infty - \infty$" a součin pro „0∞".

2. Terminologie „člen po členu" se používá spíše v případech, kdy tvrzení podobné tomu v lemmatu neplatí. Například u řad funkcí nemusí být limita součtu rovna součtu limit – pro $s_n(x) = \exp(nx^2)$ je $\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} s_n(x) = 1$. Podobně nemusí platit $\sum_{k=1}^{\infty} f'(x) = (\sum_{k=1}^{\infty} f(x))'$. O řadě $\sum_{k=1}^{\infty} f'(x)$ říkáme, že vznikla derivací řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(x)$ člen po členu.

3. Vkládání nul do řad odpovídá vkládání stejných členů do posloupnosti částečných součtů. Má-li například řada $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_3, \ldots$, pak má řada $a_1 + a_2 + 0 + a_3 + \cdots$ posloupnost částečných součtů $s_1, s_2, s_2, s_3, \ldots$. Limita posloupnosti částečných součtů se tím nezmění, proto se ani součet řady vložením nul nezmění.

13.6 Řady s nezápornými členy

Pokud pro $k \in \mathbb{N}$ platí $a_k \geq 0$, mluvíme o *řadě* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *s nezápornými členy.*

Řady s nezápornými členy mají vždy součet, ten může být nekonečný. Nemohou tedy oscilovat. Vlastnost zformulujeme v lemmatu.

Lemma o existenci součtu řady s nezápornými členy. Platí-li

$$(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \geq 0)$$

pak je posloupnost částečných součtů

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$$

13.7 Řady se střídavými znaménky

Ukážeme konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Cvičení. Načrtněte graf posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Přemýšlejte přitom o vztahu hodnot (která je větší) s_n a s_{n+1} a podobně o vztahu hodnot s_n a s_{n+2}.

Rozmyslete si:

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{2n-1} > s_{2n} < s_{2n+1}$:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \tfrac{1}{2n+1} \qquad s_{2n} = s_{2n-1} - \tfrac{1}{2n}$$

2. Vybraná posloupnost se sudými indexy $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n} > s_{2n}$$

3. Vybraná posloupnost s lichými indexy $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající.

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n+1} < s_{2n-1}$$

4. Posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená členem s_1 (poslední nerovnost plyne z bodu 3 – posloupnost s lichými indexy je klesající):

$$s_{2n} = s_{2n-1} - \tfrac{1}{2n} < s_{2n-1} < s_1$$

5. Posloupnost $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená členem s_2 (poslední nerovnost plyne z bodu 2):

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \tfrac{1}{2n+1} > s_{2n} > s_2$$

6. Rozdíl $s_{2n} - s_{2n-1}$ se blíží k nule pro $n \to \infty$.

7. Z předchozího plyne, že obě vybrané posloupnosti konvergují a jejich limity si jsou rovny.

8. Obě limity jsou rovny i limitě částečných součtů $\{s_n\}$.

9. Pro $n \in \mathbb{N}$ a součet s řady platí $s_{2n} < s < s_{2n+1}$.

Další dvě věty používají srovnávací kritérium s geometrickou řadou. K jejich důkazu použijeme následující cvičení.

Úkol. Ukažte, že z $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k \leq q)$ plyne $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq a_1 q^{k-1})$.

Věta – podílové kritérium konvergence řad. Pokud existuje $q \in (0,1)$ takové, že $(\forall k \in \mathbb{N})(a_{k+1}/a_k \leq q)$, tak řada $\sum a_k$ konverguje.

Důkaz. Tvrzení plyne z konvergence geometrické řady $\sum a_1 q^{k-1}$ a srovnávacího kritéria. □

Častěji budeme používat limitní verzi podílového kritéria.

Věta – limitní podílové kritérium konvergence řad.
Pokud je $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, tak řada $\sum a_k$ konverguje.
Pokud je $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, tak řada $\sum a_k$ diverguje.

Důkaz. Z $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L < 1$ plyne pro $q = (L+1)/2 < 1$ existence K takového, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k > K$ platí $a_{k+1}/a_k < q$ a odtud plyne tvrzení věty z podílového kritéria.

Z $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L > 1$ plyne existence K takového, že pro $k \in \mathbb{N}$, $k > K$ platí $a_{k+1}/a_k > 1$ (zvolili jsme $\varepsilon = L - 1 > 0$, pak je $L - \varepsilon > 1$), tedy posloupnost členů řady $\{a_k\}_{k=K}^{\infty}$ je od $K-$tého indexu rostoucí, neplatí tedy nutná podmínka konvergence $\lim a_k = 0$, a tedy řada $\sum a_k$ diverguje. □

Poznámka. $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = q$ znamená pro velká k: $a_{k+1} \doteq q a_k$. Řada se tedy pro velká k chová podobně jako geometrická řada s kvocientem q. Nepřekvapí tedy, že pro $q \in (0,1)$ řada konverguje.

Příklady.

1. Řada $\sum \frac{k^2}{2^k}$ konverguje, protože

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \frac{2^k(k+1)^2}{2^{k+1}k^2} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \to 1/2 \text{ pro } k \to \infty$$

   a limita $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = 1/2 < 1$.

2. Vyjde-li limita rovna jedné, tak z této skutečnosti neplyne nic. Například řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje a řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje a pro obě je limita a_{k+1}/a_k rovna jedné.

neklesající a nekonečná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má součet a ten je roven supremu částečných součtů $\sup\{\sum_{k=1}^{n} a_k : n \in \mathbb{N}\}$.

DŮKAZ. $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, proto je posloupnost částečných součtů neklesající. Odtud pak plyne existence limity této posloupnosti, která je dle kapitoly 6.1 rovna supremu částečných součtů. □

Uvedeme několik kritérií, která nám pomohou určit, zda má řada konečný součet. Ve všech tvrzeních předpokládáme, že členy řad jsou nezáporné.

Věta – srovnávací kritérium konvergence řad.
Platí-li $(\forall k \in \mathbb{N})(a_k \leq b_k)$, pak platí

1. Je-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergentní, pak konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
2. Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, pak je i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$.

DŮKAZ. Z $a_k \leq b_k$ pro $k \in \mathbb{N}$ plynou stejné nerovnosti pro částečné součty

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \leq \quad r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

a odtud limitním přechodem plyne

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} r_n$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

odkud plynou obě tvrzení věty. □

Poznámky.

1. Z konvergence „menší“ řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ neplyne nic pro „větší“ řadu. Podobně z divergence „větší“ řady neplyne nic pro „menší“ řadu.
2. Dle poznámky 3 z kapitoly 13.2 nezávisí konvergence řady na konečném počtu členů. Proto budeme při zkoumání konvergence řady vynechávat meze a budeme stručněji psát $\sum a_k$. Pokud nás bude zajímat nejen konvergence, ale i hodnota součtu řady, je třeba meze uvést.

Příklad. Ukážeme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverguje. Nabízí se srovnání s řadou $\sum \frac{1}{k(k+1)}$, o které jsme ukázali v článku 13.2, že konverguje. Nerovnost $\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^2+k}$ nám nepomůže, viz poznámka výše. Potřebujeme opačnou nerovnost, proto řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ „posuneme" o jeden člen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ a použijeme nerovnost $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$. Odtud a z konvergence řady $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$ plyne konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Věta – limitní srovnávací kritérium konvergence řad.
Platí-li $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < +\infty$, pak

1. Pokud konverguje řada $\sum b_k$, pak konverguje i řada $\sum a_k$.
2. Pokud je $\sum a_k = +\infty$, pak i $\sum b_k = +\infty$.

Důkaz. V definici limity posloupnosti $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ zvolíme $\varepsilon = 1$, k němu existuje K takové, že pro $k > K$ platí $\frac{a_k}{b_k} < L + 1$. Po úpravě dostaneme $a_k < (L+1)b_k$.
Z konvergence řady $\sum b_k$ plyne konvergence řady $\sum (L+1)b_k$ a ze srovnávacího kritéria plyne konvergence řady $\sum a_k$. Použili jsme poznámku z článku 13.2, že se nezmění konvergence řady při změně konečného počtu jejích členů – nevadí nám tedy, že $a_k < (L+1)b_k$ platí až od indexu K. □

Poznámka. $\lim_{k\to\infty} a_k/b_k = L$ znamená pro velká k: $a_k \doteq Lb_k$, tedy i $\sum_{\text{velká } k} a_k \doteq L \sum_{\text{velká } k} b_k$. Nepřekvapí tedy, že z konečnosti součtu $\sum_{\text{velká } k} b_k$ plyne konečnost součtu $\sum_{\text{velká } k} a_k$.

Lemma – ekvivalence v limitním srovnávacím kriteriu. Pokud je

$$\lim_{k\to\infty} a_k/b_k \in (0, +\infty)$$

tedy nenulová a konečná, pak řada $\sum a_k$ konverguje právě když konverguje řada $\sum b_k$.

Důkaz. Předpokládáme, že

$$\lim_{k\to\infty} a_k/b_k = L \in (0, +\infty)$$

Odtud pro limitu převrácené hodnoty dostaneme z věty o limitě podílu

$$\lim_{k\to\infty} b_k/a_k = \frac{1}{L} \in (0, +\infty)$$

a odtud a z předchozí věty plyne požadované tvrzení.

Poznámka. Podobně jako v poznámce nahoře dostaneme pro velká k

$$\sum_{\text{velká } k} a_k \doteq L \sum_{\text{velká } k} b_k$$

Tentokrát je L nejen konečné, ale navíc nenulové, nemělo by tedy překvapit, že jsou oba součty $\sum_{\text{velká } k} b_k$, $\sum_{\text{velká } k} a_k$ buď konečné, nebo nekonečné.

Příklady.

1. Chceme zjistit, zda konverguje řada $\sum \frac{3k-2}{k^3+k+1}$ a chceme použít limitní podílové kritérium. Členy řady upravíme

   $$a_k = \frac{3k}{k^3+k+1} = \frac{k(3-2/k)}{k^3(1-1/k^2+1/k^3)} = \frac{1}{k^2}\frac{3-2/k}{1-1/k^2+1/k^3}$$

   Volbou $b_k = 1/k^2$ dostaneme

   $$\frac{a_k}{b_k} = \frac{3-2/k}{1-1/k^2+1/k^3} \to 3 \text{ pro } k \to \infty$$

   Odtud a z limitního srovnávacího kritéria dostaneme konvergenci zadané řady.

2. Řada $\sum \frac{1}{k^3+1}$ konverguje protože

   $$\frac{\frac{1}{k^3+1}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{k^3+1} \to 0 \text{ pro } k \to \infty$$

   a řada $\sum \frac{1}{k^2}$ konverguje.

3. Řada $\sum \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}$ diverguje protože

   $$\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}} = \frac{\sqrt{k}+\sqrt[3]{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \to 0 \text{ pro } k \to \infty$$

   a řada $\sum \frac{1}{k}$ diverguje.