Počítání integrálů
(učební text pro studenty FP TUL)

Martina Šimůnková

18. května 2023

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Základní pojmy

Primitivní funkcí funkce f na otevřeném intervalu I rozumíme funkci F, pro kterou platí

$$(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

Příklady.
Funkce $F(x) = x^3 - 5x$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = 3x^2 - 5$ na množině reálných čísel.

Derivace $(-1/x)'$ je rovna $1/x^2$, a proto je funkce $F(x) = -\frac{1}{x}$ primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Podobně je funkce $F(x) = \log(x)$ primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $F(x) = \log(-x)$ na intervalu $(-\infty, 0)$.

Funkce $F(x) = 2\sqrt{x}$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Jiný název pro primitivní funkci je *neurčitý integrál.* Neurčitý integrál značíme symbolem $\int$ a integrační proměnnou symbolem $\mathrm{d}x$. Výše uvedené příklady zapíšeme pomocí těchto symbolů

$$\begin{aligned}
\int 3x^2 - 5 \,\mathrm{d}x &= x^3 - 5x \\
\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x} \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log(x) \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \log(-x) \\
\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x &= 2\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Všimněte si, že se z tohoto zápisu vytratily intervaly. Není to správné, ale budeme se toho zpravidla při výpočtu neurčitého integrálu dopouštět. Jiné to bude při práci s určitým integrálem, tam bude interval dán mezemi integrálu.

1.2 Jednoznačnost

Primitivní funkce není dána jednoznačně. Například $(x^2)' = (x^2+1)' = 2x$, a tedy obě funkce $F_1(x) = x^2$ i $F_2(x) = x^2 + 1$ jsou primitivními funkcemi stejné funkce $f(x) = 2x$. Pro libovolné číslo c je i funkce $F(x) = F_1(x) + c$ primitivní funkcí funkce f, primitivních funkcí má tedy funkce f nekonečně mnoho. Číslo c někdy nazýváme integrační konstantou a někdy aditivní konstantou. Říkáme pak, že je primitivní funkce dána jednoznačně až na aditivní konstantu. Jiná nejednoznačnost v pojmu primitivními funkce není, jak tvrdí následující věta.

Věta. Nechť jsou funkce F_1, F_2 primitivními funkcemi funkce f na intervalu I. Pak existuje číslo $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro $x \in I$ platí $F_1(x) = F_2(x) + c$.

DŮKAZ. Nechť jsou F_1, F_2 primitivními funkcemi funkce f na intervalu I. Pak z definice primitivní funkce plyne, že pro $x \in I$ platí $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$. Odtud plyne $F_1'(x) = F_2'(x)$.

Uvažujme funkci, která je rozdílem těchto dvou primitivních funkcí $x \mapsto F_1(x) - F_2(x)$. Z výše uvedeného plyne, že její derivace je rovna nule na intervalu I. Odtud plyne, že je tato funkce na intervalu I zároveň neklesající i nerostoucí (plyne z věty o monotonii a derivaci), a tedy je konstantní. A odtud plyne dokazované tvrzení $F_1 = F_2 + c$ na I. $\square$

Následující případ ukazuje, že je ve větě podstatné uvažovat primitivní funkce na intervalu. Obě funkce mají na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivaci rovnu $1/x$ a přesto se neliší jen o konstantu.

$$f(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \log(x) & x > 0 \\ 2 + \log(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Vzorce typu $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c$ někteří puritánštější matematici nemají příliš v lásce právě kvůli nejasnosti definičního oboru a nejasnosti významu konstanty c. V tomto textu integrační konstantu c zpravidla nebudeme uvádět.

1.3 Existence

Ke spojitým funkcím existuje primitivní funkce, ale ne vždy ji můžeme vyjádřit pomocí elementárních funkcí. K takovým, pomocí elementárních funkcí nevyjádřitelným integrálům, patří například $\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

Příkladem funkce, která nemá primitivní funkci je například funkce signum a obecně jakákoliv funkce s nespojitostí typu skok. Pokud by totiž pro nějakou funkci F platilo na okolí nuly $F'(x) = \mathrm{sgn}(x)$, pak by pro $x > 0$ bylo $F'(x) = 1$ a tedy i $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = 1$ a z věty 7.2.1 z [JV] by plynulo $F'(0) = 1$, což je ve sporu s $F'(0) = \mathrm{sgn}(0) = 0$.

Větu o existenci primitivní funkce ke spojité funkci dokážeme později za pomoci Riemannova integrálu.

1.4 Základní vzorce

Následující vzorce jsou přímým důsledkem vzorců pro derivace. Ověřte jejich platnost zderivováním.

Pro $n \neq -1$: $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$ (jedním zápisem jsme pokryli intervaly kladných i záporných čísel)

$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)$

$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)$

$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x)$

Pro $a > 0$: $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})$
$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)$

1.5 Linearita integrálu

Pro funkce f, g a čísla a, b platí $(af+bg)' = af' + bg'$. Odtud plyne obdobný vztah pro integrál

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

například

$$\int (x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x$$

Připomeňme souvislost vztahu (1.1) s lineární algebrou. Na levé straně je integrál z lineární kombinace dvou funkcí a na pravé straně je lineární kombinace integrálů. Integrování je tedy operace, která zobrazuje lineární kombinaci na lineární kombinaci obrazů. Takové zobrazení nazýváme lineárním zobrazením. V tomto smyslu je tedy integrování lineární.

1.6 Úlohy na procvičení

1. Ověřte zderivováním platnost vzorců v kapitole základní vzorce.

Pro následující funkce a intervaly nalezněte primitivní funkce a udělejte zkoušku.

2. $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$, $I = (0, +\infty)$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2x^2}{x^3}$, $I = (0, +\infty)$
4. $f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$, $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = 2 - 3\exp(x)$, $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = (1+\sqrt{x})^3$, $I = (0, +\infty)$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, $I = \mathbb{R}$

Odpovězte na otázky a své odpovědi zdůvodněte:

8. Kolik mají funkce z úloh nahoře primitivních funkcí?
9. Má funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
10. Má funkce $f(x) = \begin{cases} 2+x & x<1 \\ 5-x & x \geq 1 \end{cases}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
11. Má funkce $f(x) = \begin{cases} 2+x & x<1 \\ 4-x & x \geq 1 \end{cases}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$?
12. Jaký význam má konstanta c ve vzorci $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c$?
13. Co znamená výrok: „Integrování je lineární operace.“?

Kapitola 2

Lineární substituce

V jedné z dalších kapitol vysvětlíme metodu substituce při výpočtu integrálů. V této kapitole vysvětlíme její nejjednodušší variantu – případ lineární substituce. Chceme například spočítat integrál

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Víme, že $\int \sin(y)\,\mathrm{d}y = -\cos(y)$ a tak si tipneme, že integrál (2.1) je roven $-\cos(2x+1)$. Zderivováním zjistíme $(-\cos(2x+1))' = 2\sin(2x+1)$. Odtud nahlédneme, že náš tip stačí jen trochu opravit a dostaneme

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$$

U složitějších případů budeme substituci provádět následovně:

1. Zvolíme substituci, v našem příkladě $y = 2x+1$.
2. Vypočteme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$. V našem příkladě $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$. Odtud vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$. Obecně pro substituci $y = ax+b$ je $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y$.
3. Provedeme substituci v integrálu, v našem příkladě převedeme integrál $\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x$ na integrál $\int \frac{1}{2}\sin(y)\,\mathrm{d}y$.
4. Spočítáme integrál po substituci

$$\int \tfrac{1}{2}\sin(y)\,\mathrm{d}y = -\tfrac{1}{2}\cos(y)$$

5. Do výsledku vrátíme původní proměnnou.

$$-\tfrac{1}{2}\cos(y) = -\tfrac{1}{2}\cos(2x+1)$$

6. Dostali jsme výsledek

$$\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\cos(2x+1)$$

7. Uděláme zkoušku zderivováním výsledku

$$(-\tfrac{1}{2}\cos(2x+1))' = \sin(2x+1)$$

Ukážeme náš postup na dalším příkladě. Chceme spočítat integrál

$$\int \sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme substituci $y = 3x - 4$, zderivujeme $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x$, vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$ a provedeme substituci. Dostaneme integrál s proměnnou y a spočítáme ho

$$\int \frac{1}{3}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{3}y^{1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\frac{1}{1+1/2}y^{1+1/2} = \frac{2}{9}y^{3/2} = \frac{2}{9}\sqrt{y^3}$$

Na závěr provedeme zpětnou substituci a tím dostaneme výsledek

$$\int \sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3}$$

který zkontrolujeme zderivováním

$$\left(\tfrac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3}\right)' = \left(\tfrac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}}\right)' = \tfrac{2}{9}\tfrac{3}{2}3(3x-4)^{\frac{1}{2}} = (3x-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3x-4}$$

Za zmínku stojí, že výrazy $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ někdy nazýváme diferenciály (nebudeme se zmiňovat, odkud se tento název vzal, je to složitější záležitost a dostaneme se k tomu při probírání funkcí více proměnných) a že jejich význam známe z diferenciálního počtu – jsou to „nekonečně malé“ přírůstky funkcí. Víme, že derivace je podíl takových přírůstků, tedy $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a odtud dostáváme vztah $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$.

2.1 Úlohy na procvičení

Vypočtěte integrály a udělejte zkoušku

1. $\int \cos(2+x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$
4. $\int \exp(-x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int \exp(2x)\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{\exp(x)+1}{\exp(2x)}\,\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{2}{3x-1}\,\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{1}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x$
9. $\int (2x+1)^5\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$
12. $\int \frac{1}{1+(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$
13. $\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$
14. $\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,\mathrm{d}x$

Kapitola 3

Určitý integrál

Na začátku kapitoly definujeme *určitý integrál*, spočítáme několik příkladů, uvedeme jeho vlastnosti. U jedné vlastnosti – aditivitě vzhledem k integračnímu oboru – budeme mít omezení, kterého se můžeme zbavit modifikací definice určitého integrálu. To nás povede k definici *Newtonova určitého integrálu*.

3.1 Definice určitého integrálu

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Funkce F nechť je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I. Nechť existují limity

$$\lim_{x \to a^+} F(x) \qquad \lim_{x \to b^-} F(x)$$

a nechť je definován jejich rozdíl

$$\lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Pak tento rozdíl nazýváme *určitým integrálem funkce f na intervalu I* a značíme

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

V případě, že jsou obě limity konečné, říkáme, že *integrál konverguje*.

Poznámky.

1. Víme, že primitivní funkce není dána jednoznačně. Jak je to s určitým integrálem? Prozkoumejme to: Jsou-li F_1, F_2 dvě primitivní funkce k f na I, pak víme, že existuje konstanta C, že

   $$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + C)$$

   Odtud dostaneme

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to b^-} F_2(x) - \lim_{x\to a^+} F_2(x) &= \lim_{x\to b^-} (F_1(x) + C) - \lim_{x\to a^+} (F_1(x) + C) \\ &= \lim_{x\to b^-} F_1(x) - \lim_{x\to a^+} F_1(x) \end{aligned}$$

   V poslední rovnosti jsme použili větu o aritmetice limit, konstanta C se vzájemně odečetla.
   Závěr: hodnota určitého integrálu nezávisí na výběru primitivní funkce.

2. Funkce F je zpravidla v bodech a, b spojitá, v tom případě počítáme limity jako funkční hodnoty.

3. Výpočet určitého integrálu zapisujeme buď

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

   nebo zaměníme „svislítko“ za hranaté závorky

   $$F(x)|_a^b \quad \ldots \quad [F(x)]_a^b$$

   nebo ještě vypíšeme proměnnou, pokud není z kontextu zřejmá

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

4. Pokud je z kontextu jasná integrační proměnná, lze vynechat $\mathrm{d}x$. Integrál pak zapíšeme[1]

   $$\int_a^b f(x)$$

[1] Poznamenejme, že někteří, zvláště fyzikové, toto zkracování nemají rádi a považují je za nekorektní.

3.2 Příklady

1. Chceme spočítat integrál
$$\int_0^4 \sqrt{x}$$
Použitím vzorce nejdříve spočítáme primitivní funkci
$$\int_0^4 \sqrt{x} = [\tfrac{2}{3}x^{3/2}]_0^4$$
a poté spočítáme limity (v tomto případě funkční hodnoty)
$$\int_0^4 \sqrt{x} = [\tfrac{2}{3}x^{3/2}]_0^4 = \tfrac{2}{3}4^{3/2} - \tfrac{2}{3}0^{3/2} = \tfrac{2}{3}8 = \tfrac{16}{3}$$
Závěr: integrál $\int_0^4 \sqrt{x}$ má hodnotu 16/3 a konverguje (jeho hodnota je konečná).

2. Chceme spočítat integrál
$$\int_{-1}^1 x + y \,\mathrm{d}y$$
Všimněte si, že integrační proměnná je y. Pokud není z kontextu patrný opak, považujeme x za konstantu. Primitivní funkce je
$$\int_{-1}^1 x + y \,\mathrm{d}y = [xy + \frac{1}{2}y^2]_{y=-1}^{y=1} = x + \frac{1}{2}1^2 - (-x + \frac{1}{2}(-1)^2) = 2x$$
Závěr: integrál $\int_{-1}^1 x + y \,\mathrm{d}y$ má hodnotu $2x$ závislou na hodnotě parametru x a konverguje (jeho hodnota je konečná).

3. Chceme spočítat integrál
$$\int_0^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$
Spočítáme primitivní funkci
$$\int_0^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = [\log(x)]_0^2$$

a limity

$$[\log(x)]_0^2 = \lim_{x\to 2^-} \log(x) - \lim_{x\to 0^+} \log(x) = \log(2) - (-\infty) = +\infty$$

Závěr: integrál $\int_0^2 \frac{1}{x}$ má hodnotu $+\infty$ a nekonverguje (jeho hodnota není konečná).

4. Chceme spočítat integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Spočítáme primitivní funkci

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg}(x)]_1^{+\infty}$$

a limity

$$[\operatorname{arctg}(x)]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) - \lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

5. Chceme spočítat integrál

$$\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x$$

Primitivní funkci se naučíme počítat v kapitole o metodě per partes

$$\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = [x(\log(x)-1)]_0^1$$

Dalším úkolem je spočítat limity. Jednu z nich díky spojitosti jako funkční hodnotu

$$\lim_{x\to 1^-} x(\log(x)-1) = 1(\log(1)-1) = -1$$

Na druhou použijeme větu o aritmetice limit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x(\log(x)-1) &= \lim_{x\to 0^+} x\log(x) - \lim_{x\to 0^+} x \\ &= \lim_{x\to 0^+} x\log(x) - 0 \\ &= \lim_{x\to 0^+} x\log(x)\end{aligned}$$

a L'Hospitalovo pravidlo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\log(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -x^2/x = \lim_{x\to 0^+} -x \\ &= 0\end{aligned}$$

Výsledný integrál tedy je roven

$$\int_0^1 \log(x)\,\mathrm{d}x = [x(\log(x)-1)]_0^1 = -1-(0-0) = -1$$

3.3 Vlastnosti určitého integrálu

Následující vlastnosti obsahují rovnosti, které obvykle používáme k výpočtu. Chceme spočítat jednu ze stran rovnosti a místo ní spočítáme druhou. Proto jsou důležité i předpoklady o existenci, v některých případech mají smysl buď obě strany rovnosti nebo žádná, v jiných může jedna strana mít smysl a druhá nikoliv. Zajímavá je v tomto ohledu vlastnost 2 – aditivita vzhledem k intervalu, podrobnosti probereme v kapitole 3.5.

1. *Linearita.*
   $c \in \mathbb{R}$, z konvergence pravé strany plyne konvergence levé strany, z existence pravé strany (může tedy být nekonečná) plyne existence levé strany. Vlastnost zpravidla používáme tak, že chceme spočítat levou stranu a místo ní spočítáme pravou stranu.

$$\int_a^b f(x)+g(x) = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x) \tag{3.1}$$

$$\int_a^b cf(x) = c\int_a^b f(x) \tag{3.2}$$

   Vlastnost (3.1) nazýváme *aditivitou*, vlastnost (3.2) *homogenitou*.[2]

2. *Aditivita vzhledem k integračnímu oboru.*
   Je-li $a < b < c$ a existuje-li pravá strana, pak existuje i levá strana a platí

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)$$

[2]Tyto pojmy pravděpodobně znáte z lineární algebry.

Všimněte si, že vlastnost jsme nazvali aditivitou, stejně jako (3.1). Vysvětlíme tuto podobnost: V (3.1) je integrál ze součtu funkcí roven součtu integrálů. Zde je integrál přes sjednocení intervalů roven součtu integrálů. Sjednocení intervalů tedy v jistém smyslu odpovídá součtu funkcí.

3. *Pozitivita integrálu.*
   Pokud je $(\forall x \in (a.b))(f(x) \geq 0)$ a integrál $\int_a^b f(x)$ existuje, pak je nezáporný.

4. *Monotonie integrálu.*
   Pokud je $(\forall x \in (a.b))(f(x) \leq g(x))$ a existují oba integrály $\int_a^b f(x)$, $\int_a^b g(x)$, pak platí $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$.

Ještě vysvětleme, proč tuto vlastnost nazýváme monotonií. Zopakujme definici funkce h neklesající na intervalu I:

$$(\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2)(h(x_1) \leq h(x_2))$$

Zde roli x_1, x_2 mají funkce f, g, nerovnost $f \leq g$ znamená

$$(\forall x \in (a.b))(f(x) \leq g(x))$$

Roli $h(x_1), h(x_2)$ zde mají integrály

$$\int_a^b f(x), \qquad \int_a^b g(x)$$

3.4 Důkazy vlastností

1. Aditivita integrálu plyne z aditivity derivace (derivace součtu je součet derivací) a věty o aritmetice limit. Nechť jsou F, G primitivní funkce k f, g na (a, b). Pak

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) + g(x) &= \lim_{x \to b^-} (F(x) + G(x)) - \lim_{x \to a^+} (F(x) + G(x)) \\
&= \lim_{x \to b^-} F(x) + \lim_{x \to b^-} G(x) - \left(\lim_{x \to a^+} F(x) + \lim_{x \to a^+} G(x) \right) \\
&= \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x) + \lim_{x \to b^-} G(x) - \lim_{x \to a^+} G(x) \\
&= \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)
\end{aligned}$$

Podobně homogenita plyne z homogenity derivace (derivace násobku je násobek derivace) a z věty o limitě násobku

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x) &= \lim_{x\to b^-}(cF(x)) - \lim_{x\to a^+}(cF(x))\\ &= c\left(\lim_{x\to b^-}F(x) - \lim_{x\to a^+}F(x)\right)\\ &= c\int_a^b f(x)\end{aligned}$$

2. Aditivita vzhledem k integračnímu oboru: nechť je F primitivní funkcí k f na (a, c). Rozepíšeme levou stranu rovnosti

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \lim_{x\to b^-}F(x) - \lim_{x\to a^+}F(x) + \lim_{x\to c^-}F(x) - \lim_{x\to b^+}F(x)$$

Protože je $b \in (a, c)$, je F v bodě b spojitá, a proto se jednostranné limity rovnají

$$\lim_{x\to b^-}F(x) = \lim_{x\to b^+}F(x)$$

a ve vztahu výše se odečtou. Dostaneme

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = -\lim_{x\to a^+}F(x) + \lim_{x\to c^-}F(x)$$

a odtud

$$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)$$

3. Pozitivita: je-li f nezáporná na I, pak má její primitivní funkce F na I nezápornou derivaci a je tedy neklesající. Proto je

$$\lim_{x\to a^+}F(x) \le \lim_{x\to b^-}F(x)$$

a odtud je

$$\int_a^b f(x) = \lim_{x\to b^-}F(x) - \lim_{x\to a^+}F(x) \ge 0$$

4. Monotonie: je-li $f(x) \geq g(x)$ na I, pak je rozdíl $f(x) - g(x)$ nezáporný na I. Odtud a z pozitivity plyne nezápornost integrálu

$$\int_a^b f(x) - g(x) \geq 0$$

a odtud a z linearity integrálu (vlastnosti 1 a 2) plyne nejdříve

$$\int_a^b f(x) - \int_a^b g(x) \geq 0$$

a po úpravě

$$\int_a^b f(x) \geq \int_a^b g(x)$$

3.5 Problém s aditivitou vzhledem k integračnímu oboru

Problém vysvětlíme na příkladech. Chceme spočítat integrály

$$\int_{-2}^{3} |x| \qquad \int_{-5}^{1} \operatorname{sgn}(x)$$

U obou se nabízí rozdělit integrační obor na dva intervaly, na kterých umíme spočítat primitivní funkci a použít aditivitu

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} |x| &= \int_{-2}^{0} |x| + \int_{0}^{3} |x| = \int_{-2}^{0} -x + \int_{0}^{3} x \\
&= [-x^2/2]_{-2}^{0} + [x^2/2]_0^3 = 0 - (-2) + 9/2 - 0 = 13/2 \\
\int_{-5}^{1} \operatorname{sgn}(x) &= \int_{-5}^{0} -1 + \int_{0}^{1} 1 \\
&= [-x]_{-5}^{0} + [x]_0^1 = -5 + 1 = -4
\end{aligned}$$

Problém je s existencí spočítaného výsledku a tedy i korektností výpočtu. Absolutní hodnota jako spojitá funkce má primitivní funkci a na zadaném intervalu má určitý integrál. Funkce signum na intervalu obsahujícím nulu není spojitá, má zde nespojitost typu skok a primitivní funkci tedy nemá. To nás vede k definici zobecněné primitivní funkce a od ní odvozeného Newtonova integrálu.

3.6 Zobecněná primitivní funkce a Newtonův integrál

Definice. Funkci F nazveme *zobecněnou primitivní funkcí funkce f na intervalu* $I = (a, b)$, pokud je F na I spojitá a existuje konečná množina K taková, že

$$(\forall x \in I \setminus K)(F'(x) = f(x))$$

Příklad. Funkce $F(x) = |x|$ je zobecněnou primitivní funkcí funkce signum na $\mathbb{R}$, protože je spojitá a pro $x > 0$ platí $|x|' = x' = 1 = \operatorname{sgn}(x)$ a pro $x < 0$ platí $|x|' = (-x)' = -1 = \operatorname{sgn}(x)$. Stačí tedy zvolit konečnou množinu $K = \{0\}$.

Newtonův integrál pak definujeme stejně jako určitý integrál, jen zaměníme primitivní funkci za zobecněnou primitivní funkci.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Funkce F nechť je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu I. Nechť existují limity

$$\lim_{x \to a^+} F(x) \qquad \lim_{x \to b^-} F(x)$$

a nechť je definován jejich rozdíl

$$\lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Pak tento rozdíl nazýváme *Newtonovým (určitým) integrálem funkce f na intervalu I* a značíme

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

V případě, že jsou obě limity konečné, říkáme, že *Newtonův integrál konverguje.*

Poznámka. Zobecněná primitivní funkce je dána jednoznačně až na aditivní konstatntu. Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na výběru této primitivní funkce, konstanta se při výpočtu od sebe odečte stejně jako u určitého integrálu výše.

Pro zjednodušení výpočtů se hodí dodefinovat Newtonův integrál i pro případ stejných mezí, případně pro dolní mezí větší než je horní mez.

Definice. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ definujeme Newtonův integrál vztahy

$$\begin{aligned} (N)\int_a^a f(x) &= 0 \\ (N)\int_a^b f(x) &= -(N)\int_b^a f(x) \end{aligned}$$

Příklady. Jsou-li meze stejné, nemusíme počítat primitivní funkci a můžeme rovnou napsat výsledek

$$(N)\int_1^1 \exp(x^2) = 0$$

Jsou-li meze „prohozené“ (dolní je větší než horní), lze počítat standardním způsobem

$$(N)\int_2^0 2x = [x^2]_2^0 = 0 - 4 = -4$$

jen si v případě limit musíme dát pozor, abychom je počítali „zevnitř“ intervalu

$$\begin{aligned} (N)\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{x^3}} &= (N)\int_1^0 x^{-3/2} = [-2x^{-1/2}]_1^0 = \\ &= \lim_{x\to 0^+} -2x^{-1/2} - \lim_{x\to 1^-} -2x^{-1/2} = -\infty - (-2) = -\infty \end{aligned}$$

Plyne to pro $b < a$ z

$$\begin{aligned} (N)\int_a^b f(x) &= -(N)\int_b^a f(x) \\ &= -\left(\lim_{x\to a^-} F(x) - \lim_{x\to b^+} F(x)\right) \\ &= -\lim_{x\to a^-} F(x) + \lim_{x\to b^+} F(x) \\ &= \lim_{x\to b^+} F(x) - \lim_{x\to a^-} F(x) \end{aligned}$$

3.7 Vlastnosti Newtonova integrálu

Z vlastností určitého integrálu uvedených v 3.3 zůstává beze změny aditivita a homogenita vzhledem k integrované funkci a pozitivita a monotonie. Níže zformulujeme aditivitu přes interval, předpoklady o existenci nám umožní efektiněji tuto vlastnost používat při výpočtech.

Tvrzení o aditivitě. Nechť je $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pak platí (3.3), jakmile některá ze stran konverguje

$$(N)\int_a^c f(x) = (N)\int_a^b f(x) + (N)\int_b^c f(x) \tag{3.3}$$

Poznámka. V tvrzení je podstatné, že z existence pravé strany plyne existence levé strany, protože takto chceme (3.3) použít. Chceme spočítat levou stranu, neumíme to přímo a místo ní spočítáme stranu pravou.

Důkaz tvrzení je založen na rozboru případů. Provedeme pro některé z nich. Pro $a = c$ jsou výrazy na obou stranách rovny nule, jak plyne přímo z definice Newtonova integrálu výše (na levé straně je integrál na (a, a), na pravé se integrály liší znaménkem).
Pro $a < b < c$ máme z existence pravé strany zobevněné primitivní funkce k f: na (a, b) funkci F_{ab} a na (b, c) funkci F_{bc}. Z konvergence obou integrálů plyne konečnost limit těchto primitivních funkcí v bodě b. Můžeme je tedy (obě nebo jednu z nich) změnit o konstantu a pak „slepit“ a získat tím spojitou funkci. Ta pak bude zobecněnou primitivní funkcí F na (a, c). Dále je důkaz analogický jako výše v 3.4 pro určitý integrál. Rozepíšeme pravou stranu

$$(N)\int_a^b f(x) + (N)\int_b^c f(x) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) + \lim_{x\to c^-} F(x) - \lim_{x\to b^+} F(x)$$

Ze spojitosti zobecněné primitivní funkce F v bodě b plyne rovnost jednostranných limit v tomto bodě, limity se tedy odečtou a dostaneme

$$-\lim_{x\to a^+} F(x) + \lim_{x\to c^-} F(x)$$

což je rovno

$$(N)\int_a^c f(x)$$

Další možnosti lze rozebrat následovně (uděláme pro ukázku jen pro jeden případ): Vztah pro $a < b < c$, který jsme právě odvodili, upravíme na

$$(N)\int_a^c f(x) - (N)\int_a^b f(x) = (N)\int_b^c f(x)$$

znaménko mínus změníme na plus, když zároveň vyměníme meze

$$(N)\int_a^c f(x) + (N)\int_b^a f(x) = (N)\int_b^c f(x)$$

Když ještě na levé straně vyměníme pořadí

$$(N)\int_b^a f(x) + (N)\int_a^c f(x) = (N)\int_b^c f(x)$$

a přejmenujeme meze $A = b$, $B = a$, $C = c$ dostaneme pro $B < A < C$

$$(N)\int_A^B f(x) + (N)\int_B^C f(x) = (N)\int_A^C f(x)$$

$\square$

Kapitola 4

Metoda per partes

4.1 Úvod

Metoda per partes, česky po částech, je odvozena od pravidla pro derivaci součinu

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Zintegrováním dostaneme

$$\int (fg)' \,\mathrm{d}x = \int f'g + fg' \,\mathrm{d}x$$

Na levé straně se derivování a integrování vzájemně vyruší a dostaneme

$$fg = \int f'g + fg' \,\mathrm{d}x$$

Na pravé straně použijeme linearitu integrálu

$$fg = \int f'g \,\mathrm{d}x + \int fg' \,\mathrm{d}x$$

Jeden z integrálů nyní ze vztahu vyjádříme

$$\int f'g \,\mathrm{d}x = fg - \int fg' \,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

Příklad. Vypočteme metodou per partes integrál

$$\int x\cos(2x) \,\mathrm{d}x$$

Nejdříve zvolíme f', g tak, aby $f'g = x\cos(2x)$. Máme dvě možnosti

$$f' = x, g = \cos(2x) \quad \text{nebo} \quad f' = \cos(2x), g = x$$

Dalším krokem bude spočítat f a g' a dosadit do (4.1). Funkci f získáme zintegrováním f', funkci g' zderivováním g. Pro funkci kosinus nezáleží na tom, zda budeme integrovat nebo derivovat, v obou případech dostaneme násobek sinu. Pro polynom derivováním jeho stupeň snížíme, zatímco integrováním zvýšíme. Proto ze dvou výše zmiňovaných možností vybereme

$$f' = \cos(2x), \quad g = x$$

dopočítáme

$$f = \tfrac{1}{2}\sin(2x), \quad g' = 1$$

dosadíme do (4.1)

$$\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

Zbývá spočítat integrál na pravé straně[1]. Dostaneme

$$\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$$

Na závěr uděláme zkoušku zderivováním.

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{x}{2}\sin(2x) + \tfrac{1}{4}\cos(2x)\right)' &= \tfrac{1}{2}\sin(2x) + \tfrac{x}{2}(\cos(2x))2 - \tfrac{1}{4}\sin(2x)2 \\
&= \tfrac{1}{2}\sin(2x) + x\cos(2x)) - \tfrac{1}{2}\sin(2x) \\
&= x\cos(2x)
\end{aligned}$$

Příklad.

$$\int x^2\exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme (ze stejných důvodů jako v minulém příkladě)

$$f' = \exp(-x) \quad g = x^2$$

Dopočítáme

$$f = -\exp(-x) \quad g' = 2x$$

[1]Proto se metoda jmenuje po částech: nejdříve integrujeme f' a poté fg'.

Dosadíme do (4.1)

$$\int x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x = -x^2 \exp(-x) + \int 2x \exp(-x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

Zbývá spočítat integrál na pravé straně. Všimneme si jeho podobnosti s původním integrálem a to nám napoví, že máme metodu per partes použít ještě jednou, tentokrát pro

$$\begin{array}{ll} f' = \exp(-x) & g = 2x \\ f = -\exp(-x) & g' = 2 \end{array}$$

Dostaneme

$$\int 2x \exp(-x)\,\mathrm{d}x = -2x \exp(-x) + \int 2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

Nyní již integrál na pravé straně spočítat umíme

$$\int 2x \exp(-x)\,\mathrm{d}x = -2x \exp(-x) - 2 \exp(-x) \tag{4.3}$$

Zbývá dosadit (4.3) do (4.2)

$$\begin{aligned} \int x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x &= -x^2 \exp(-x) + \int 2x \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2 \exp(-x) - 2x \exp(-x) - 2 \exp(-x) \end{aligned}$$

Výsledek ještě upravíme, vytkneme exponenciálu

$$\int x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x = (-x^2 - 2x - 2) \exp(-x)$$

a uděláme zkoušku

$$\begin{aligned} \big((-x^2 - 2x - 2) \exp(-x)\big)' &= (-2x - 2) \exp(-x) - (-x^2 - 2x - 2) \exp(-x) \\ &= x^2 \exp(-x) \end{aligned}$$

4.2 Rekurentní formule

V minulém příkladě jsme spočítali integrál z $x^2 \exp(-x)$ a použili jsme metodu per partes dvakrát. Při výpočtu integrálu

$$\int x^5 \exp(2x)\,\mathrm{d}x$$

nás čeká pětinásobné použití. V tomto případě se vyplatí odvodit tzv. *rekurentní formuli* pro integrál

$$I_n = \int x^n \exp(2x)\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme

$$f' = \exp(2x) \quad g = x^n$$

spočítáme

$$f = \tfrac{1}{2}\exp(2x) \quad g' = nx^{n-1}$$

a dosadíme do (4.1). Dostaneme

$$I_n = \int x^n \exp(2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^n \exp(2x) - \int \tfrac{1}{2}\exp(2x) n x^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Všimneme si, že na pravé straně po vytknutí konstanty $n/2$ z integrálu dostaneme I_{n-1}. Odvodili jsme tedy vztah

$$I_n = \frac{1}{2}x^n \exp(2x) - \frac{n}{2} I_{n-1} \tag{4.4}$$

Naším cílem je spočítat I_5. Použitím (4.4) tento integrál převedeme na I_4, ten dále na I_3 …až k I_0, který spočítáme. Do (4.4) postupně za n dosazujeme $5, 4, 3, 2, 1$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \tfrac{1}{2}x^5 \exp(2x) - \tfrac{5}{2} I_4 \\
&= \tfrac{1}{2}x^5 \exp(2x) - \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^4 \exp(2x) - \tfrac{4}{2} I_3\right) \\
&= \tfrac{1}{2}x^5 \exp(2x) - \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^4 \exp(2x) - \tfrac{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2} I_2\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}x^5 \exp(2x) - \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^4 \exp(2x) - \tfrac{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2 - I_1\right)\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}x^5 \exp(2x) - \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^4 \exp(2x) - \tfrac{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} I_0\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Protože

$$I_0 = \int x^0 \exp(2x)\,\mathrm{d}x = \int \exp(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\exp(2x)$$

dostaneme

$$I_5 = \tfrac{1}{2}x^5 \exp(2x) - \tfrac{5}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^4 \exp(2x) - \tfrac{4}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\exp(2x)\right)\right)\right)\right)$$

Zbývá odstranit závorky.

Ke výsledku se též můžeme dostat od I_0 opakovaným použitím (4.4)

$$\begin{aligned}
I_0 &= \tfrac{1}{2}\exp(2x) \\
I_1 &= \tfrac{1}{2}x\exp(2x) - \tfrac{1}{2}I_0 = \tfrac{1}{2}x\exp(2x) - \tfrac{1}{4}\exp(2x) = \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right)\exp(2x) \\
I_2 &= \tfrac{1}{2}x^2\exp(2x) - I_1 = \tfrac{1}{2}x^2\exp(2x) - \left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right)\exp(2x) = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\right)\exp(2x) \\
I_3 &= \tfrac{1}{2}x^3\exp(2x) - \tfrac{3}{2}I_2 = \quad \cdots \quad = \left(\tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{8}\right)\exp(2x) \\
I_4 &= \tfrac{1}{2}x^4\exp(2x) - 2I_3 = \quad \cdots \quad = \left(\tfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{4}\right)\exp(2x) \\
I_5 &= \tfrac{1}{2}x^5\exp(2x) - \tfrac{5}{2}I_4 = \quad \cdots \quad = \left(\tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{5}{4}x^4 + \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{15}{4}x + \tfrac{15}{8}\right)\exp(2x)
\end{aligned}$$

4.3 Typické příklady na metodu per partes

Výše uvedené příklady jsou typickými integrály na použití metody per partes. Obecně do této skupiny patří integrály ze součinu polynomu P a exponenciály nebo sinu či kosinu

$$\int P(x)\exp(ax)\,\mathrm{d}x \qquad \int P(x)\sin(ax)\,\mathrm{d}x \qquad \int P(x)\cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

V těchto případech vždy polynom derivujeme a exponenciálu či sinus, kosinus integrujeme. Metodu per partes použijeme tolikrát, jaký má polynom P stupeň. Ve všech třech případech je možné odvodit a použít rekurentní vzorec.

Dalšími typickými příklady jsou součiny polynomu a logaritmu nebo některé z cyklometrických funkcí.

$$\int P(x)\log(x)\,\mathrm{d}x \ \int P(x)\arcsin(x)\,\mathrm{d}x \ \int P(x)\arccos(x)\,\mathrm{d}x \ \int P(x)\,\mathrm{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$$

V tomto případě naopak polynom integrujeme a logaritmus atd. derivujeme.

Příklad. Máme spočítat integrál

$$\int x\log(x)\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme

$$f' = x \quad g = \log(x)$$

spočítáme

$$f = \tfrac{1}{2}x^2 \quad g' = \tfrac{1}{x}$$

dosadíme do (4.1)

$$\int x\log(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\log(x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

upravíme a dopočítáme

$$\int x\log(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{1}{4}x^2$$

a provedeme zkoušku

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}x^2\log(x) - \tfrac{1}{4}x^2\right)' &= x\log(x) + \tfrac{1}{2}x^2\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{4}2x\\ &= x\log(x) + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}x\\ &= x\log(x)\end{aligned}$$

Metodou per partes lze řešit i příklady, kde funkce není součinem jako je následující

Příklad. Vypočtěte integrál

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x$$

zvolíme

$$f' = 1 \quad g = \log(x)$$

dopočítáme

$$f = x \quad g' = \tfrac{1}{x}$$

dosadíme do (4.1)

$$\int 1\log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

upravíme a dopočítáme

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x$$

případně ještě vytkneme x před závorku

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\left(\log(x) - 1\right)$$

a uděláme zkoušku

$$\left(x\left(\log(x) - 1\right)\right)' = \log(x) - 1 + x\tfrac{1}{x} = \log(x)$$

4.4 Další rekurentní vzorec

Odvodíme rekurentní vzorec pro integrál

$$I_n = \int \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme

$$f' = \sin(x) \quad g = \sin^{n-1}(x)$$

Dopočítáme

$$f = -\cos(x) \quad g' = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)$$

dosadíme do (4.1)

$$I_n = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \int (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Úpravou $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ dostaneme

$$-\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \int (n-1)\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x$$

další úpravou

$$-\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int (\sin^{n-2}(x) - \sin^n(x))\,\mathrm{d}x$$

a odtud

$$I_n = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

odkud postupně vyjádříme I_n převedením členu na levou stranu

$$I_n + (n-1)I_n = -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)I_{n-2}$$

a vydělením rovnosti n

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \tag{4.5}$$

Příklad. Chceme vypočítat

$$\int \sin^6(x)\,\mathrm{d}x$$

Použijeme (4.5) a protože je exponent 6 je sudý, začneme výpočtem I_0.

$$I_0 = \int \sin^0(x)\,\mathrm{d}x = x$$

Dále použijeme (4.5) pro $n = 2, 4, 6$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\tfrac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \tfrac{1}{2}x \\
I_4 &= -\tfrac{1}{4}\cos(x)\sin^3(x) + \tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \tfrac{1}{2}x\right) \\
&= -\tfrac{1}{4}\cos(x)\sin^3(x) - \tfrac{3}{8}\cos(x)\sin(x) + \tfrac{3}{8}x \\
I_6 &= -\tfrac{1}{6}\cos(x)\sin^5(x) + \tfrac{5}{6}\left(-\tfrac{1}{4}\cos(x)\sin^3(x) - \tfrac{3}{8}\cos(x)\sin(x) + \tfrac{3}{8}x\right) \\
&= -\tfrac{1}{6}\cos(x)\sin^5(x) - \tfrac{5}{24}\cos(x)\sin^3(x) - \tfrac{5}{16}\cos(x)\sin(x) + \tfrac{5}{16}x
\end{aligned}$$

4.5 Určitý integrál

Věta. Pokud výraz na pravé straně existuje (tj. existuje primitivní funkce, limity i aritmetické operace), pak platí

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \tag{4.6}$$

Příklad. Vztah (4.6) použijeme na (4.5)

$$\int_0^{\pi/4} \sin^n(x) = [-\tfrac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x)]_0^{\pi/4} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/4}\sin^{n-2}(x)$$

Dosadíme $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\sin(0) = 0$ a pro $n \geq 2$ dostaneme

$$\int_0^{\pi/4} \sin^n(x) = -\frac{1}{n\sqrt{2^n}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/4}\sin^{n-2}(x)$$

Pro další meze dostaneme pro $n \geq 2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)$$

4.6 Úlohy na procvičení

1. Vypočtěte
$$\int_0^\pi \sin^5(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Odvoďte rekurentní vzorce pro integrály
$$\begin{aligned} S_n &= \int x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ C_n &= \int x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$
a použijte je k výpočtu
$$\int x^4 \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Odvoďte rekurentní vzorec pro integrál
$$I_n = \int \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$$
a použijte ho k výpočtu
$$\int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\pi \cos^8(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Vypočtěte
$$\int_0^1 \sqrt{x}\log(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Vypočtěte
$$\int_{-1}^0 (x^2-3x+2)\exp(3x)\,\mathrm{d}x$$

6. Vypočtěte
$$\int_0^2 \frac{1-x^2}{\exp(2x)}\,\mathrm{d}x$$

Kapitola 5

Integrace racionální funkce

5.1 Základní pojmy

Připomeneme na příkladech vybrané pojmy: *polynom* (*mnohočlen*), *racionální funkce*, *ryze lomená racionální funkce*, *parciální zlomek*.

Racionální funkce je například

$$\frac{x^5}{x^4 - 1}$$

Vydělením dostaneme součet *polynomu* a *ryze lomené funkce* – ta má v čitateli polynom nižšího stupně než ve jmenovateli.

$$\frac{x^5}{x^4 - 1} = x + \frac{x}{x^4 - 1}$$

Parciálními zlomky pak v tomto případě jsou

$$\frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{x^2+1} \quad \frac{x}{x^2+1}$$

Parciální zlomky budeme rozlišovat podle kořenů jmenovatele – podle toho, zda jsou kořeny reálné nebo komplexní a zda jsou jednonásobné či vícenásobné.

1. Jednonásobný reálný kořen: $\frac{1}{x+a}$

2. Vícenásobný reálný kořen s násobností $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $\frac{1}{(x+a)^n}$

3. Jednonásobné komplexní kořeny: $\frac{\cdots}{x^2+px+q}$
4. Vícenásobné komplexní kořeny s násobností $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $\frac{\cdots}{(x^2+px+q)^n}$

V případě komplexních kořenů je standardně v čitateli parciálního zlomku buď 1 nebo x. My ukážeme, že je možné čitatele volit vhodněji s ohledem na snažší výpočet integrálu.

5.2 Integrace parciálních zlomků

Napíšeme několik vzorců. V kapitole úloh na procvičení pak necháme čtenáři vzorce zderivováním ověřit.

1. $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \log|x+a|$
2. $\int \frac{1}{(x+a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}, n > 1$
3. $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$ pro jmenovatele bez reálných kořenů. Jmenovatele doplníme na čtverec a substitucí převedeme na integrál $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y$. Viz příklad dole.
4. $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \log(x^2+px+q)$ pro jmenovatele bez reálných kořenů

Poznámka. V případě 4 lze vzorec použít i pro případ s reálnými kořeny ve jmenovateli, pokud dáme logaritmovaný výraz do absolutní hodnoty. V případě 3 také můžeme postup použít s reálnými kořeny ve jmenovateli, ale dojdeme k integrálu $\int \frac{1}{y^2-a^2}\,\mathrm{d}y$.

Příklad na doplnění na čtverec. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x$$

Doplníme na čtverec výraz ve jmenovateli $x^2+3x = (x+3/2)^2 - 9/4$, dosadíme do integrálu a přitom sečteme $-9/4+4$. Dostaneme $\int \frac{1}{(x+3/2)^2+7/4}\,\mathrm{d}x$. Nyní použijeme vzorec $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}$ pro $a = \sqrt{7/4} = \sqrt{7}/2$ a se substitucí $y = x + 3/2$. Dostaneme výsledek (který můžeme zkontrolovat zderivováním)

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$$

Ještě zbývá probrat případ násobných komplexních kořenů ve jmenovateli. Násobnost těchto kořenů označíme n, $n \geq 2$. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} \, \mathrm{d}x$$

Podobně jako v předchozím příkladě doplníme kvadratický výraz ve jmenovateli na čtverec a substitucí převedeme integrál na

$$\int \frac{\tilde{A}y + \tilde{B}}{(y^2 + r^2)^n} \, \mathrm{d}y$$

Pro první integrál získáme substitucí $t = y^2 + r^2$ vzorec

5. $\int \frac{y}{(y^2+r^2)^n} \, \mathrm{d}y = \frac{-1}{2(n-1)(y^2+r^2)^{n-1}}$

Druhý označíme K_n

$$K_n = \int \frac{1}{(y^2 + r^2)^n} \, \mathrm{d}y,$$

pro $n = 1$ použijeme vzorec

6. $\int \frac{1}{y^2+r^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \frac{y}{r}$

a pro $n \geq 2$ použijeme k výpočtu tzv. rekurentní vzorec (formuli)[1]

$$K_{n+1} = \frac{y}{2nr^2(y^2 + r^2)^n} + \frac{2n-1}{2nr^2} K_n \tag{5.1}$$

Příklad na použití rekurentní formule. Vypočteme integrál

$$\int \frac{1}{(x^2 + 2)^3} \, \mathrm{d}x$$

Rekurentní formuli (5.1) použijeme nejdříve pro $n = 1$

$$K_2 = \int \frac{1}{(x^2 + 2)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4} K_1,$$

[1] Návod na odvození rekurentní formule je v úloze 5 v kapitole 5.6.

dosadíme ze vzorce 6 za K_1 a dostaneme

$$K_2 = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Dále použijeme rekurentní formuli pro $n = 2$

$$K_3 = \int \frac{1}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8} K_2$$

a dosadíme z předchozího za K_2. Dostaneme

$$K_3 = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

a po úpravě

$$K_3 = \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3x}{32(x^2+2)} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Příklad. Vypočteme integrál

$$\int \frac{3x-6}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x$$

Integrál rozdělíme na lineární kombinaci integrálů

$$3\int \frac{x}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x - 6\int \frac{1}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x,$$

první integrál vypočteme buď substitucí $t = x^2 + 2$ nebo pomocí vzorce (5)

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x = \frac{-1}{4(x^2+2)^2},$$

druhý jsme spočítali výše. Zkompletováním výsledků (a pokrácením zlomků) dostaneme

$$\int \frac{3x-6}{(x^2+2)^3}\, \mathrm{d}x = -\frac{3}{4(x^2+2)^2} - \frac{3x}{4(x^2+2)^2} - \frac{9x}{16(x^2+2)} - \frac{9}{16\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

5.3 Rozklad na součet parciálních zlomků

Připomeneme na příkladu rozklad na součet parciálních zlomků. Vezmene funkci z úvodní kapitoly a vyjádříme ji jako lineární kombinaci parciálních zlomků

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{Dx}{x^2+1}$$

Naším úkolem je nyní spočítat takové hodnoty čísel A až D, aby se výrazy rovnaly pro všechna reálná x mimo kořeny jmenovatele. Roznásobíme společným jmenovatelem a dostaneme rovnici

$$x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + C(x^2-1) + Dx(x^2-1)$$

Po úpravě – roznásobení závorek a vytknutí koeficientů A až D – dostaneme

$$x = A(x^3-x^2+x-1) + B(x^3+x^2+x+1) + C(x^2-1) + D(x^3-x)$$

Připomeňme, že hledáme hodnoty čísel A až D takových, že daná rovnice je splněná pro nekonečně mnoho x. To je možné jen pokud se všechny členy na levé a pravé straně odečtou a po úpravě vyjde rovnice $0 = 0$. Odtud dostaneme rovnice pro A až D – porovnáme koeficienty u stejných mocnin na levé a pravé straně.

$$\begin{aligned}
0 &= A+B+D \\
0 &= -A+B+C \\
1 &= A+B-D \\
0 &= -A+B-C
\end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme některou metod lineární algebry a dostaneme $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$.

Odtud dostaneme rozklad – vyjádření složitějšího zlomku jako součet jednodušších výrazů.

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{1/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-1} + \frac{-x/2}{x^2+1}$$

5.4 Proč rozklad na parciální zlomky funguje

Detailní analýza by byla rozsáhlá, proto jen uvedeme hlavní myšlenku pro konkrétní případ jmenovatele. Zvolíme ho přitom dostatečně obecně, aby bylo vidět, jak postupovat v jiných případech.

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2(x^2+5)^3} \tag{5.2}$$

Stupeň jmenovatele je osm, proto je stupeň polynomu P v čitateli nejvýše sedm a obsahuje osm parametrů

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7$$

Racionální funkci R můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci osmi funkcí. Pro zkrácení zápisu označíme jmenovatel $J(x) = (x-1)^2(x^2+5)^3$

$$\tfrac{1}{J(x)} \quad \tfrac{x}{J(x)} \quad \tfrac{x^2}{J(x)} \quad \tfrac{x^3}{J(x)} \quad \tfrac{x^4}{J(x)} \quad \tfrac{x^5}{J(x)} \quad \tfrac{x^6}{J(x)} \quad \tfrac{x^7}{J(x)} \tag{5.3}$$

Úloha. Ukažte, že výše uvedených osm funkcí je lineárně nezávislých.

Rozklad na parciální zlomky odpovídá vyjádření funkce R jako lineární kombinace funkcí

$$\tfrac{1}{x-1} \quad \tfrac{1}{(x-1)^2} \quad \tfrac{1}{x^2+5} \quad \tfrac{x}{x^2+5} \quad \tfrac{1}{(x^2+5)^2} \quad \tfrac{x}{(x^2+5)^2} \quad \tfrac{1}{(x^2+5)^3} \quad \tfrac{x}{(x^2+5)^3} \tag{5.4}$$

Úloha. Ukažte, že každou funkci z (5.4) je možné vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí z (5.3).

Formulace problému. Při otázce v záhlaví kapitolky nás zajímá, zda je možné každou funkci z (5.2) vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí z (5.4).

Úloha. Rozmyslete si, že k odpovědi ano na zformulovaný problém stačí ukázat, že funkce z (5.4) jsou lineárně nezávislé.

Poznámka. Důkaz lineární nezávislosti zmiňované v úloze dělat nebudeme.

5.5 Integrace s a bez rekurentní formule

Na příkladě ukážeme integraci s použitím rekurentní formule a alternativní postup bez rekurentní formule. V závěru budeme diskutovat, jak a proč tento postup funguje v obecném případě.
Příklad. Rozložíme na parciální zlomky a následně zintegrujeme výraz

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}$$

Standardní parciální zlomky jsou

$$\frac{A}{x^2+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx}{(x^2+1)^2} \tag{5.5}$$

Výpočet dá $A = 4$, $B = 0$, $C = -4$, $D = 0$, tedy

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{(x^2+1)^2}$$

První integrál je

$$\int \frac{4}{x^2+1} = 4\,\mathrm{arctg}(x)$$

druhý spočítáme pomocí rekurentní fomrule (5.1)

$$\int \frac{4}{(x^2+1)^2} = 4K_2 = 4\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}K_1\right) = \frac{2x}{x^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}(x)$$

Výsledek pak je

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = 4\,\mathrm{arctg}(x) - \left(\frac{2x}{x^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}(x)\right)$$

a po úpravě

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = 2\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{2x}{x^2+1}$$

Alternativní postup je uvědomit si, že

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \tag{5.6}$$

a použít při rozkladu na parciální zlomky jinou bázi

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{-2Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{D(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Standardním postupem jako při rozkladu na parciální zlomky dostaneme $A = 2$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2$ a odtud dostaneme

$$\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

a zintegrováním (zde je podstatné, že k druhému zlomku máme integrál bez výpočtu, stačí se podívat na (5.6))

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg}(x) - \frac{2x}{x^2+1}$$

Ještě se zamysleme nad tím, jak a proč takový postup bude fungovat v obecném případě. Vraťme se k bazím (5.3), (5.4). Zde bychom použili parciální zlomky

$$\tfrac{1}{x-1} \quad \tfrac{1}{(x-1)^2} \quad \tfrac{1}{x^2+5} \quad \tfrac{x}{x^2+5} \quad \left(\tfrac{1}{x^2+5}\right)' \quad \left(\tfrac{x}{x^2+5}\right)' \quad \left(\tfrac{1}{(x^2+5)^2}\right)' \quad \left(\tfrac{x}{(x^2+5)^2}\right)' \tag{5.7}$$

První, co je dobré si uvědomit, je, že derivací zlomku s kořenem násobnosti n ve jmenovateli dostaneme zlomek s kořenem násobnosti $n+1$. Pak je vidět, že zlomky v (5.7) lze vyjádřit jako lineární kombinaci zlomků z (5.3). Zbývá dokázat, že jsou zlomky v (5.7) lineárně nezávislé (a že jich je správný počet – stejný, jako je dimenze prostoru). Odtud plyne, že tvoří bazi lineárního obalu (5.3), a tedy je možné je úspěšně použít na rozklad funkce (5.2).

Následující úlohy procvičují lineární závislost/nezávislost funkcí.
Úloha. Ukažte, že funkce v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně závislé

$$v_1(x) = (x-1)^2, \quad v_2(x) = (x-2)^2, \quad v_3(x) = (x-3)^2, \quad v_4(x) = (x-4)^2$$

zatímco funkce u_1, u_2, u_3, u_4 jsou lineárně nezávislé

$$u_1(x) = (x-1)^3, \quad u_2(x) = (x-2)^3, \quad u_3(x) = (x-3)^3, \quad u_4(x) = (x-4)^3$$

a rozhodněte, zda jsou lineárně závislé funkce s_1, s_2, s_3, s_4

$$s_1(x) = \sin(x-1),\; s_2(x) = \sin(x-2),\; s_3(x) = \sin(x-3),\; s_4(x) = \sin(x-4)$$

5.6 Úlohy na procvičení

1. Ukažte platnost vzorců 1, 2, 4 z kapitoly 5.2.
2. Napište vzorce 5, 6 z kapitoly 5.2 (tj. spočítejte derivace v integrálu).
3. Nalezněte primitivní funkci k $f(x) = \frac{1}{x^2-6x+12}$. Určete interval k této primitivní funkci.

4. Určete primitivní funkci k $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$ na $(-2, 2)$.

5. Určete primitivní funkci k $f(x) = \frac{x^4}{(x^2+4)^2}$ na $\mathbb{R}$.

*6 Odvoďte rekurentní formuli (5.1).
Návod: počítejte K_n metodou per partes a zvolte $f' = 1$.

Kapitola 6

Z doby Newtona a Leibnize

6.1 Derivace jako podíl diferenciálů

Vrátíme se do doby Newtona a Leibnize, kteří budovali pojmy derivace a integrálu pomocí nekonečně malých veličin (přírůstků) $\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y$, které nahrazují pojem limity:

$$\text{Derivaci funkce} \quad y = f(x) \quad \text{vyjádříme jako podíl} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

S těmito nekonečně malými přírůstky pracovali jako s běžnými veličinami.

Terminologická poznámka. Nekonečně malé veličiny budeme nazývat *diferenciály.*

Poznámka: Derivace a přímá úměrnost. Vztah $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ vyjadřuje přímou úměrnost přírůstků.

6.2 Derivace složené funkce

Ukážeme, jak pomocí diferenciálů odvodíme pravidlo pro derivaci složené funkce. Vyjádříme derivaci vnitřní funkce g a vnější funkce f jako podíl diferenciálů

$$y = g(x) \quad \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(x)$$

$$z = f(y) \quad \tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = f'(y)$$

a vynásobením vztahů dostaneme (výraz $\mathrm{d}y$ se zde zkrátí)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(y)g'(x)$$

známý vzorec pro derivaci složené funkce.

6.2.1 Příklad

Výše vyložený vztah derivace a diferenciálů i pravidlo pro derivaci složené funkce budeme demonstrovat na příkladu. Zvolili jsme kombinaci geometrie a fyziky.

Zadání. Těžký předmět je podložen deskou čtvercového tvaru o straně a. Zajímá nás, jak se změní tlak této desky na její podloží, pokud změníme stranu čtverce o Δa.

Řešení. Nejdříve spočítáme, jak se změní plošný obsah desky. Původně byl $S = a^2$, po změně je $S + \Delta S = (a + \Delta a)^2$, odkud dostaneme $\Delta S = (a + \Delta a)^2 - a^2 \doteq 2a\Delta a$.[1]

Podobně určíme přírůstek tlaku[2] buď elementárně

$$p = \frac{F}{S}, \quad p + \Delta p = \frac{F}{S + \Delta S}$$

$$\Delta p = \frac{F}{S + \Delta S} - \frac{F}{S} = -\frac{F\Delta S}{S(S + \Delta S)} \doteq -\frac{F\Delta S}{S^2}$$

nebo pomocí derivace[3]

$$\frac{\Delta p}{\Delta S} = \left(\frac{F}{S}\right)' = -\frac{F}{S^2}$$

Na závěr dosadíme za ΔS z předchozího

$$\Delta p = -\frac{F}{S^2}\Delta S = -\frac{F}{S^2}2a\Delta a$$

Odkud dostaneme pravidlo pro derivaci složené funkce[4]

$$\frac{\Delta p}{\Delta a} = \frac{\Delta p}{\Delta S}\frac{\Delta S}{\Delta a} = -\frac{2aF}{S^2}\left(= -\frac{2F}{a^3}\right)$$

[1] Nakreslete čtverec a z obrázku vykoukejte obdélníky o celkovém obsahu ΔS.

[2] Uvažujeme pouze váhu předmětu, proto je síla F konstantní, změnu váhy desky zanedbáme.

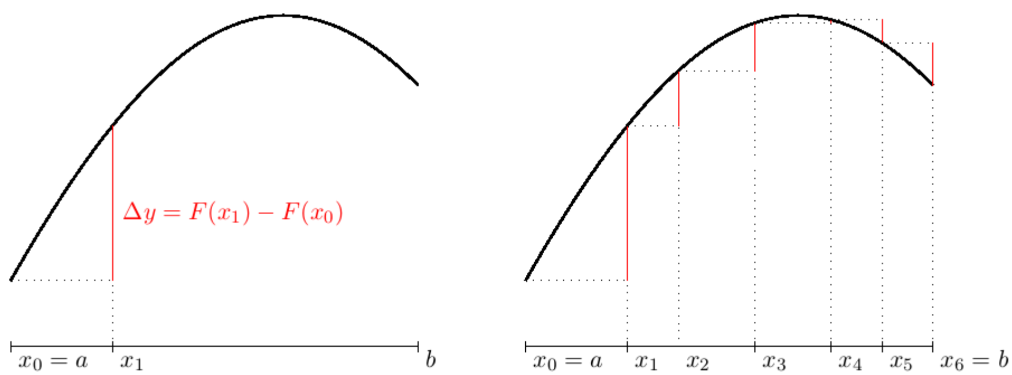
[3] Záporné znaménko znamená pokles tlaku. Rozmyslete si, že to tak je v pořádku.

[4] Poslední úprava je dosazení $S = a^2$, není podstatná, uvádíme jen pro doplnění.

6.3 Integrál jako součet nekonečně malých veličin

Pomocí bodů $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ rozdělíme interval (a, b) na dílky (viz obrázek) a pomocí dílčích přírůstků vyjádříme celkový přírůstek

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \cdots + \\ &\quad (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_1) - F(x_0)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) \end{aligned}$$



Rozdíly $F(x_{k+1}) - F(x_k)$ vyjádříme pomocí derivace[5]

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) \doteq F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{derivace}$$

Sečtením pak dostaneme

$$F(b) - F(a) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Pokud zvyšujeme n – počet dělících bodů intervalu, dostaneme v limitě součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin, kterou značíme integrálem

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \sim \sum F'(x)\Delta x \equiv \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

[5] Základní vztah matematické analýzy, měl by vám při jeho spatření naskočit automaticky obrázek s grafem.

6.3.1 Příklad

Zadání. Odvodíme vzorec pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu – to je pohyb, v němž se rychlost zvětšuje přímo úměrně času: $v(t) = at$.

Řešení. Vyjdeme ze vztahu pro okamžitou rychlost: je to podíl dráhy a času pro krátký časový (nekonečně malý) úsek

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Vyjádříme úsek $\mathrm{d}s$

$$\mathrm{d}s = v(t)\,\mathrm{d}t$$

Celkovou dráhu dostaneme sečtením – zintegrováním – jednotlivých úseků

$$s = \sum \Delta s = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} at\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2$$

6.4 Substituce v integrálu

Rozdíl $F(b) - F(a)$ vyjádříme pomocí derivace $F' = f$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Nyní dosadíme $x = g(t)$, $x_k = g(t_k)$ a rozdíl $x_{k+1} - x_k$ nahradíme

$$x_{k+1} - x_k \doteq g'(t_k)(t_{k+1} - t_k) \qquad \text{(derivace)}$$

Dostaneme

$$F(b) - F(a) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k))g'(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Pravou stranu vyjádříme jako integrál, meze získáme ze vztahů $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$[6]

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(g(t_k))g'(t_k)(t_{k+1} - t_k) \end{aligned}$$

[6] případně pomocí inverzní funkce $\alpha = g^{-1}(a)$, $\beta = g^{-1}(b)$

Kapitola 7

Metoda substituce

Princip substituce vysvětlíme na následujícím příkladu. Rovnici (7.1) neumíme vyřešit přímo, a tak ji v A převedeme na kvadratickou rovnici, kterou vyřešit umíme. Zpětnou substitucí se pak v C od kořenů kvadratické rovnice dostaneme ke kořenům rovnice (7.1).

$$4^x - 2^{x+3} + 12 = 0 \tag{7.1}$$

A. Substitucí $t = 2^x$ převedeme rovnici (7.1) na kvadratickou rovnici

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

B. Vyřešíme kvadratickou rovnici: dostaneme $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

C. Vrátíme se k původní rovnici: řešení x_1, x_2 vypočteme ze vztahů

$$2^{x_1} = 2 \qquad 2^{x_2} = 6$$

Dostaneme $x_1 = 1$, $x_2 = \log 6/\log 2$.

U integrálů je mechanismus obdobný: integrál, který neumíme spočítat přímo, převedeme substitucí na integrál, který spočítat umíme a pak se zpětnou substitucí vrátíme k výsledku původního integrálu.

7.1 Schéma substituční metody

Substituce v integrálu je založena na derivaci složené funkce a převádí jeden z problémů hledání primitivní funkce na druhý:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ (F(g(t)))' &= f(g(t))g'(t) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Při substituci v integrálu postupujeme v krocích:

1. Zvolíme substituci v jednom z tvarů $x = g(t)$, $t = g^{-1}(x)$.
2. Rozhodneme se, ze kterého z těchto tvarů spočítáme derivaci a vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$.
3. Spočítáme vztah mezi diferenciály, vyjádříme $\mathrm{d}x$ a dosadíme do integrálu. Do integrálu též dosadíme za x. Po substituci se v integrálu bude nacházet jen nová integrační proměnná.

Vztah (7.2) lze použít oběma směry, dostaneme tak dvě schémata substituce. Všimněte si, že v jednom potřebujeme k substituční funkci inverzní funkci, ve druhém nikoliv.

1. Integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ převedeme substitucí $x = g(t)$ na integrál $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$, který spočítáme. Výsledek označíme $G(t)$ a dosadíme do něj zpětnou substituci $t = g^{-1}(x)$. Dostaneme $G(g^{-1}(x))$. Symbolicky celý proces zapíšeme
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathrm{I}} G(t) \xrightarrow{\mathrm{ZS}} G(g^{-1}(x))$$
2. Integrál $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$ převedeme substitucí $t = g(x)$ na integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$, který spočítáme. Výsledek označíme $F(t)$ a dosadíme do něj zpětnou substituci. Dostaneme $F(g(x))$. Symbolicky celý proces zapíšeme
$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \int f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathrm{I}} F(t) \xrightarrow{\mathrm{ZS}} F(g(x))$$

Z uvedených dvou metod budeme vybírat podle typu příkladu, zpravidla se hodí jen jedna. Pro ilustraci spočítáme integrál, pro který můžeme zvolit oba způsoby.

Příklady.

1. Chceme spočítat integrál
$$\int \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme substituci $t = \exp(x)$, vyjádříme $x = \log(t)$ a spočítáme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x = (\log(t))' \,\mathrm{d}t = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Dosadíme do integrálu

$$\int \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \int \frac{t}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Upravíme a zintegrujeme

$$\int \frac{t}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \log(1+t)$$

Na závěr provedeme zpětnou substituci

$$\log(1+t) \xrightarrow{\mathrm{ZS}} \log(1+\exp(x))$$

zapíšeme výsledek

$$\int \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log(1+\exp(x))$$

a případně uděláme zkoušku zderivováním výsledku.

Ukážeme druhý způsob výpočtu. Vztah mezi diferenciály spočítáme jinak: $\mathrm{d}t = (\exp(x))'\,\mathrm{d}x = \exp(x)\,\mathrm{d}x$. Nyní si všimneme, že výraz za integrálem $\int$ lze zapsat jako součin

$$\frac{1}{1+\exp(x)} \qquad \exp(x)\,\mathrm{d}x$$

kde druhý výraz je roven $\mathrm{d}t$ a do prvního dosadíme ze substituce. Dostaneme

$$\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Další postup je stejný jako výše, tedy spočítáme integrál a dosadíme $t = \exp(x)$. Dostaneme výsledek

$$\int \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log(1+\exp(x))$$

2. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Použijeme substituci $t = \sqrt{x}$, vyjádříme inverzní vztah $x = t^2$ (zde je potřeba přidat podmínku $t \geq 0$) a spočítáme vztah mezi diferenciály: $\mathrm{d}x = (t^2)' \,\mathrm{d}t = 2t \,\mathrm{d}t$. Provedeme substituci

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{S}} \int \frac{1}{1+t} \, 2t \,\mathrm{d}t$$

upravíme a zintegrujeme

$$\int \frac{2t}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int \frac{2(t+1)-2}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int 2 - \frac{2}{1+t} \,\mathrm{d}t \overset{C}{=} 2t - \log(1+t)$$

provedeme zpětnou substituci a zapíšeme výsledek

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x})$$

případně ještě uděláme zkoušku zderivováním.

7.2 Substituce v určitém integrálu

Věta o (monotonní) substituci. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, g nechť je rostoucí a spojitá na $I = (\alpha, \beta)$ a má na I derivaci. Nechť je

$$a = \lim_{x \to \alpha^+} g(x) \qquad b = \lim_{x \to \beta^-} g(x) \tag{7.3}$$

Nechť existuje jedna ze stran rovnosti. Pak existuje i druhá a platí

$$\int_a^b f(y) \,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(g(x)) g'(x) \,\mathrm{d}x \tag{7.4}$$

Poznámky.

1. **Klesající funkce:** Věta platí ve stejném znění i pro g klesající na I. Pro meze v integrálu na levé straně rovnosti v tomto případě platí $a > b$. Takový integrál jsme definovali vztahem

$$\int_a^b f(y) \,\mathrm{d}y = -\int_b^a f(y) \,\mathrm{d}y$$

2. **O derivaci a spojitosti:** Podmínka spojitosti plyne z existence derivace, pokud je derivace konečná (a v tomto případě je v předpokladech přebytečná). Uvažujme však substituci $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$, zde má funkce g v bodě nula nevlastní derivaci, odtud spojitost neplyne a podmínka spojitosti je pro platnost věty podstatná.

Použití: Větu používáme dvojím způsobem.

1. Integrál máme ve tvaru pravé strany rovnosti (7.4). Zvolíme vhodně g, dopočítáme $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ (v případě spojitosti, v obecném případě počítáme limity (7.3)), spočítáme integrál na levé straně. Výsledek je roven integrálu na pravé straně.

2. Máme zadané f, a, b. Zvolíme g, dopočítáme $\alpha = g^{-1}(a)$, $\beta = g^{-1}(b)$ (v případě spojitosti, limity v obecném případě), g' a integrál na pravé straně. Výsledek je roven integrálu na levé straně.

Příklad. Máme spočítat integrál

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Ukážeme obojí použití věty.

1. Integrál máme ve tvaru levé strany (7.4) a převedeme ho na pravou stranu substituci $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$ $\mathrm{d}x = (t^2)'\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t$, $\alpha = \sqrt{0} = 0$, $\beta = \sqrt{4} = 2$:

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^2 \frac{2(t+1)-2}{1+t}\,\mathrm{d}t = [2t - \log(1+t)]_0^2 \\ &= 4 - \log(3) - (0 - \log(1)) = 4 - \log(3)\end{aligned}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4 - \log(3)$$

2. Použijeme stejnou substituci $t = \sqrt{x}$, odvodíme vztah mezi diferenciály

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

a upravíme integrál do tvaru vhodného pro substituci

$$\int_0^4 \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Nyní máme integrál ve tvaru pravé strany (7.4). Zbývá spočítat $a = \sqrt{0}$, $b = \sqrt{4}$ a dosadit

$$\int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Další výpočet je stejný jako výše.

Výše jsme uvedli integrál, ve kterém je možné udělat substituci dvěma různými způsoby. V dalším příkladě je možný pouze jeden způsob.

Příklad.

$$\int_0^{5\pi/6} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Zde se nabízí substituce $t = \sin(x)$, $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$. Integrál je ve tvaru pravé strany (7.4), meze pro levou stranu jsou $\sin(0) = 0$, $\sin(5\pi/6) = 1/2$. Po substituci dostaneme

$$\int_0^{1/2} t^2\,\mathrm{d}t$$

Substituce je v pořádku, přestože nemůžeme použít větu o substituci přímo, protože funkce $g(x) = \sin(x)$ není na intervalu $(0, 5\pi/6)$ ani rostoucí ani klesající. Můžeme, ale integrál rozložit na součet dvou integrálů, pro které větu použít můžeme (intervaly jsme zvolili tak, že je na nich funkce g monotonní)

$$\int_0^{5\pi/6} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Dostaneme po substituci

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^{1/2} t^2\,\mathrm{d}t$$

integrál, který lze upravit pomocí aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru na

$$\int_0^{1/2} t^2\,\mathrm{d}t$$

Uvedený postup zformulujeme do věty.

Věta o (obecnější) substituci. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, g nechť má derivaci na $I = (\alpha, \beta)$ a nechť je na I spojitá, f nechť má konečný integrál na intervalu $g(I) = \{g(x) : x \in I\}$. Označme

$$a = \lim_{x \to \alpha^+} g(x) \qquad b = \lim_{x \to \beta^-} g(x)$$

Pak existují oba integrály a rovnají se.

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.5}$$

Použití: Je stejné jako v příkladu výše. Je třeba v zadaném integrálu

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

spatřit součin složené funkce s derivací vnitřní funkce, zvolit g, dopočítat a, b a integrál na levé straně (7.5). Výsledek je roven integrálu na pravé straně.

Kromě výše uvedeného je dále potřeba ověřit definiční obor a integrovatelnost funkce f. Jinak můžeme dostat nesmysl jako v případě integrálu

$$\int_{-3}^4 2x\sqrt{x^2-5}\,\mathrm{d}x$$

který substitucí $t = x^2 - 5$ převedeme na integrál

$$\int_4^{11} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

Přitom integrál před substitucí není definován[1], zatímco integrál po substituci ano.

7.3 Důkazy vět o substituci

Nejdříve dokážeme první větu, kterou jsme nazvali větou o monotonní substituci. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že obě strany 7.4 konvergují

[1] Pro $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \subset (-3, 4)$ je pod odmocninou záporné číslo.

(tj. jsou konečné). Nechť je F funkce primitivní k f na intervalu (a, b). Pak je

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{y\to b^-} F(y) - \lim_{y\to a^+} F(y)$$

Dále je pro $y \in (a, b)$ je $F'(y) = f(y)$, a z věty o derivaci složené funkce plyne$(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$ pro $x \in (\alpha, \beta)$. Odtud plyne

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\beta^-} F(g(x)) - \lim_{x\to\alpha^+} F(g(x))$$

Z věty o limitě složené funkce pak plyne

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\beta^-} F(g(x)) &= \lim_{y\to b^-} F(y) \\ \lim_{x\to\alpha^+} F(g(x)) &= \lim_{y\to a^+} F(y) \end{aligned}$$

a odtud plyne 7.4. □

Dokážeme větu, kterou jsme nazvali o obecnější substituci. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že interval $I = (\alpha, \beta)$ lze rozdělit bodem $\gamma \in I$ na intervaly (α, γ), (γ, β) tak, že je funkce g rostoucí na (α, γ) a klesající na (γ, β). Na každém intervalu použijeme větu o monotonní substituci

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\gamma f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{g(\gamma)} f(y)\,\mathrm{d}y \\ \int_\gamma^\beta f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{g(\gamma)}^b f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Sečtením a použitím aditivity určitého integrálu vzhledem k intervalu

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\gamma f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_\gamma^\beta f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^{g(\gamma)} f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{g(\gamma)}^b f(y)\,\mathrm{d}y &= \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

dostaneme (7.5). □

7.4 Příklady na obě substituční metody

Spočítáme několik příkladů a ukážeme na nich použití obou substitučních metod. V dalších kapitolách pak uvedeme příklady, které lze spočítat jen jednou z uvedených metod.

Příklad.
Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{\exp(2x)+1}\,\mathrm{d}x \tag{7.6}$$

Použijeme substituci $t = \exp(x)$ – zde je podstatné, že $\exp(2x) = t^2$ a podobně lze upravit $\exp(3x)$. Pomocí inverzní funkce vyjádříme $x = \log(t)$ a zderivujeme: $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Dosadíme do integrálu (7.6)

$$\int \frac{t^3+1}{t^2+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \tag{7.7}$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce – vydělíme a rozložíme na parciální zlomky (uvádíme výsledek, výpočet necháme na čtenáři)

$$\frac{t^3+1}{(t^2+1)t} = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}$$

zintegrujeme (jeden z integrálů najdete v kapitole 7.6, příklad 2, případně v kapitole o integraci racionální funkce)

$$\int 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;\stackrel{C}{=}\; t + \log(t) - \operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{2}\log(t^2+1)$$

a dosadíme zpět $t = \exp(x)$. Dostaneme

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{\exp(2x)+1}\,\mathrm{d}x \;\stackrel{C}{=}\; \exp(x) + x - \operatorname{arctg}(\exp(x)) - \frac{1}{2}\log(\exp(2x)+1)$$

Chceme-li udělat zkoušku, zderivujeme výsledek a upravíme.

Substituci $t = \exp(x)$ provedeme ještě druhým způsobem. Nebudeme počítat inverzní funkci, vztah mezi deferenciály je tentokrát $\mathrm{d}t = \exp(x)\,\mathrm{d}x$. Integrál upravíme do tvaru vhodného pro substituci – rozšíříme výrazem $\exp(x)$

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{(\exp(2x)+1)\exp(x)}\exp(x)\,\mathrm{d}x$$

a provedeme substituci

$$\int \frac{t^3+1}{(t^2+1)t}\,\mathrm{d}t$$

Vidíme, že jsme dostali stejný integrál jako při použití předchozí metody, viz (7.7). To nepřekvapuje, protože substituce je stejná, liší se jen způsobem provedení. Proto i výsledek bude stejný

$$\int \frac{\exp(3x)+1}{\exp(2x)+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \exp(x)+x-\operatorname{arctg}(\exp(x))-\frac{1}{2}\log(\exp(2x)+1)$$

Srovnání metod. V první metodě jsme *potřebovali* inverzní funkci k substituci. Provedení substituce bylo *přímočaré*. Ve druhé jsme *nepotřebovali* inverzní funkci k substituci. Před provedením substituce jsme integrál *upravili.*

Za zmínku stojí, že v jedné metodě derivujeme starou proměnnou podle nové a ve druhé novou proměnnou podle staré.

Zdůrazněme, že je potřeba ovládat obě metody, protože některé integrály je možné spočítat jen jednou z nich. Takové příklady uvedeme v dalších kapitolách. Zde ještě zintegrujeme jednu funkci oběma metodami.

Příklad.
Chceme spočítat integrál

$$\int_1^9 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \tag{7.8}$$

K odstrannění odmocniny použijeme substituci $x=t^2$, ze které odvodíme $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, přepočítáme meze, dosadíme do integrálu a upravíme

$$\int_1^3 \frac{t^2}{1+\sqrt{t^2}}\,2t\,\mathrm{d}t=\int_1^3 \frac{2t^3}{1+t}\,\mathrm{d}t \tag{7.9}$$

Poznamenejme, že jsme upravili $\sqrt{t^2}$ na t (tj. pro kladné t, viz poznámka pod příkladem). Dostali jsme integrál z racionální funkce. Vydělením dostaneme

$$\frac{2t^3}{1+t}=2t^2-2t+2-\frac{2}{1+t}$$

a zintegrováním

$$\int_1^3 2t^2-2t+2-\frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\log(1+t)\right]_0^3$$

Dosazením mezí a úpravou dostaneme

$$15 - 2\log(4) - \left(\frac{5}{3} - 2\log(2)\right) = \frac{40}{3} - \log(4)$$

Poznamenejme, že jsme v tomto příkladě mohli vyjádřit t jinak, a sice $t = -\sqrt{x}$. Pak bychom v (7.9) upravili $\sqrt{t^2} = -t$. Dostali bychom integrál

$$\int_{-1}^{-3} \frac{2t^3}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

který vyjde stejně jako výše (z cvičných důvodů spočtěte a ověřte).

Ještě ukážeme druhý způsob provedení substituce Zderivujeme $t = \sqrt{x}$, dostaneme $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Před substitucí integrál upravíme – rozšíříme výrazem $2\sqrt{x}$

$$\int_1^9 \frac{2x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

a provedeme substituci

$$\int_1^3 \frac{2t^2 t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Další výpočet je stejný jako nahoře a vede ke stejnému výsledku.

7.5 Úlohy na procvičení

1. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x^3}}{x^2+x}$$

   Výpočet proveďte dvakrát – substitucemi $y = \sqrt{x}$, $z = -\sqrt{x}$. Substituci proveďte metodou podle svého výběru (možné jsou obě). Po výpočtu udělejte zkoušku.

2. Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{1}{1+\exp(x)}$$

   Substituci proveďte oběma metodami. Po výpočtu udělejte zkoušku.

3. Zvolte substituci tak, abyste se zbavili odmocnin, tj. převeďte integrál substitucí na integrál z racionální funkce. Integrál poté spočítejte a udělejte zkoušku.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$
Návod: použijte substituci $x = y^n$ pro vhodně zvolené n.

7.6 Substituce bez inverzní funkce

U tohoto druhu substituce je potřeba získat cit pro volbu substituce. Budeme proto vysvětlovat, co nás k její volbě vede.

1. Spočítáme integrál $\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

   Zvolíme substituci $y = x^2$. Proč je vhodné zvolit zrovna tuto substituci vysvětlíme později, nejdřív integrál spočítáme. Zderivujeme substituci $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$, upravíme integrál tak aby obsahoval výraz $2x\,\mathrm{d}x$, za který dosadíme $\mathrm{d}y$ a dosadíme i y za x^2
$$\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}\exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \int \tfrac{1}{2}\exp(-y)\,\mathrm{d}y$$
   Zintegrujeme (použijeme přitom lineární substituci)
$$\int \tfrac{1}{2}\exp(-y)\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} -\tfrac{1}{2}\exp(-y)$$
   Zpětnou substitucí získáme výsledek
$$\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\tfrac{1}{2}\exp(-x^2)$$
   Zderivováním výsledku uděláme zkoušku.

   Poznámka: Integrál jsme mohli spočítat i substitucí $t = -x^2$, dostali bychom integrál z $\exp(t)$ a ušetřili si lineární substituci. Při výběru substituce je podstatné, že integrujeme součin výrazů, z nichž jeden obsahuje x^2 (snadno do něj za x^2 dosadíme) a druhý je derivací x^2, až na faktor 2, který snadno získáme úpravou. Stejná substituce by byla možná i v případě, že by pod integrálem bylo x^3 místo x
$$\int x^3\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}x^2\exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \tfrac{1}{2}\int y\exp(-y)\,\mathrm{d}y$$

Integrál po substituci bychom spočítali metodou integrace po částech (per partes). Místo x^3 by mohla být jakákoliv mocnina s lichým exponentem. Pro mocninu se sudým exponentem naopak substituce není vhodná. Po úpravě bychom dostali

$$\int x^2 \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{2}x \exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x$$

Zde by nám dělalo problém dosazení za x. Sice by bylo možné substituci dokončit volbou $x = \sqrt{y}$, případně $x = -\sqrt{y}$ podle toho, na jakém intervalu primitivní funkci hledáme, ale dostali bychom integrál obsahující odmocninu, který neumíme spočítat

$$\int \tfrac{1}{2}x \exp(-x^2)\,2x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \tfrac{1}{2}\int \sqrt{y}\exp(-y)\,\mathrm{d}y$$

2. Spočítáme integrál $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

   Stejně jako v předchozím příkladě máme součin dvou výrazů, kde jeden obsahuje x^2 a druhý snadno můžeme upravit na $2x$, tedy derivaci x^2. Zvolíme proto substituci stejně jako v předchozím příkladě: $y = x^2$, $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$. Upravíme integrál a provedeme substituci

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(x^2+1)}2x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(y+1)}\,\mathrm{d}y$$

   Zintegrujeme (opět za pomoci lineární substituce, kterou provedeme zpaměti)

$$\int \frac{1}{2(y+1)}\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} \tfrac{1}{2}\log|y+1|$$

   Zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \tfrac{1}{2}\log(x^2+1)$$

   Opět provedeme zkoušku zderivováním.

   Poznámky:
   Mohli jsme použít substituci $t = x^2 + 1$ a vyhnuli bychom se lineární substituci.
   Také jsme tento integrál mohli spočítat dosazením do vzorce z kapitoly o integraci parciálních zlomků. Zde jsme výpočet provedli kvůli procvičení.
   Otázka: Proč jsme mohli vynechat ve výsledku absolutní hodnotu?

3. Spočítáme integrál
$$\int_0^5 \frac{x^3}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$$
I zde je vhodná substituce $t = x^2+5,\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, protože po úpravě dostaneme
$$\int_0^5 \frac{x^2}{2(x^2+5)}\,2x\,\mathrm{d}x$$
a zde lze provést substituci dosazením $x^2 = t-5$ (nebudeme tedy mít v integrálu odmocninu)
$$\int_5^{30} \frac{t-5}{2t}\,\mathrm{d}t$$
Integrál spočítáme
$$\int_5^{30} \frac{t-5}{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{5}{2}\log(t)\right]_5^{30} = \frac{30}{2} - \frac{5}{2}\log(30) - (\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\log(5)) = \frac{25}{2} - \frac{5}{2}\log(6)$$
a dostaneme tím výsledek
$$\int_0^5 \frac{x^3}{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{25}{2} - \frac{5}{2}\log(6)$$

4. Spočítáme integrál $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$.
Všimneme si, že x^2 je až na faktor 3 derivací x^3 a že x^6 snadno upravíme do tvaru vhodného pro substituci za x^3
$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3((x^3)^2+1)}\,3x^2\,\mathrm{d}x$$
Po substituci $y = x^3$ dostaneme integrál
$$\int \frac{1}{3(y^2+1)}\,\mathrm{d}y$$
Spočítáme ho
$$\int \frac{1}{3(y^2+1)}\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} \tfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(y)$$
Zpětnou substitucí získáme výsledek
$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \tfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(x^3)$$

Zderivováním uděláme zkoušku.

POZNÁMKA: Kdybychom si nevšimli možnosti substituce, mohli bychom integrál spočítat rozkladem na parciální zlomky. Začali bychom rozkladem jmenovatele na součin

$$\begin{aligned} x^6+1 &= (x^2)^3+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) \\ &= (x^2+1)[(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2] \\ &= (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1) \end{aligned}$$

Pak bychom provedli rozklad

$$\frac{x^2}{x^6+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-\sqrt{3}x+1}$$

a spočítali $A=0$, $B=-1/3$, $C=0$, $D=1/6$, $E=0$, $F=1/6$. Dva zlomky bychom doplnili na čtverec

$$\frac{1}{x^2\pm\sqrt{3}x+1} = \frac{1}{(x\pm\sqrt{3}/2)^2+1/4}$$

a zintegrovali (integrace je jen dosazení do vzorců, úpravy typu $\frac{1}{6}\frac{1}{1/2} = \frac{1}{3}$ a $(x+\sqrt{3}/2)/(1/2) = 2x+\sqrt{3}$ necháme na čtenáři)

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(x) + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})$$

Výsledek se na první pohled liší od výsledku nahoře. Z jednoznačnosti integrálu plyne, že se liší maximálně o konstantu. Dosazením $x=0$ a použitím toho, že arkustangens je lichá funkce, tedy $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}(\sqrt{3})$ dostaneme hodnotu této konstanty – zjistíme, že je rovna nule a výsledky se tedy rovnají.

Ověřit, že se rovnají, můžeme například použitím součtového vzorce pro tangens $\operatorname{tg}(x+y) = (\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}(y))/(1-\operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y))$ a z něj odvozeného vztahu $\operatorname{arctg}(X)+\operatorname{arctg}(Y) = \operatorname{arctg}(\frac{X+Y}{1-XY})$

5. Spočítáme integrál $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

   Všimneme si zase, že x^3 je až na faktor 4 rovno derivaci x^4. Můžeme tedy integrál upravit na

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{4}\sqrt{x^4+1}\,4x^3\,\mathrm{d}x$$

a provést substituci $y = x^4$

$$\int \tfrac{1}{4}\sqrt{x^4+1}\,4x^3\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{4}\sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y$$

Integrál spočítáme lineární substitucí

$$\int \tfrac{1}{4}\sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{4}\int (y+1)^{1/2} \stackrel{C}{=} \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{3}(y+1)^{3/2} = \tfrac{1}{6}\sqrt{(y+1)^3}$$

Zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \tfrac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3}$$

Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

POZNÁMKA: Mohli jsme použít substituci $t = x^4 + 1$.

6. Spočítáme integrál $\int \frac{1}{x(\log(x)+1)}\,\mathrm{d}x$.

   Všimneme si, že faktor $\frac{1}{x}$ je derivací logaritmu, a tedy po úpravě

$$\int \frac{1}{x(\log(x)+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\log(x)+1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

   lze udělat substituci $y = \log(x),\ \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{\log(x)+1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y$$

   Integrál spočítáme lineární substitucí

$$\int \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} \log|y+1|$$

   Zpětnou substitucí dostaneme výsledek

$$\int \frac{1}{x(\log(x)+1)}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \log|\log(x)+1|$$

7. Spočítáme integrál $\int (\sin(x))^5\,\mathrm{d}x$.

V předchozích příkladech byla volba substituce intuitivní, tady tomu tak není. To, že níže uvedená substituce funguje, je založeno na úpravě

$$\begin{aligned}(\sin(x))^5 &= (\sin(x))^4 \sin(x) = ((\sin(x))^2)^2 \sin(x) \\ &= (1-(\cos(x))^2)^2 \sin(x)\end{aligned} \qquad (7.10)$$

Zde si všimneme, že sinus je až na znaménko derivací kosinu, a tedy lze provést substituci $y = \cos(x),\ \mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (\sin(x))^5 = -\int (1-(\cos(x))^2)^2(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\int (1-y^2)^2\,\mathrm{d}y$$

Před integrací umocníme závorku

$$-\int (1-y^2)^2\,\mathrm{d}y = -\int 1 - 2y^2 + y^4\,\mathrm{d}y = -y + \tfrac{2}{3}y^3 - \tfrac{1}{5}y^5$$

a zpětnou substitucí získáme výsledek

$$\int (\sin(x))^5\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\cos(x) + \tfrac{2}{3}(\cos(x))^3 - \tfrac{1}{5}(\cos(x))^5$$

Pokud bychom chtěli udělat zkoušku, tak výsledek zderivujeme a pak upravíme podobně jako v (7.10).

Poznámka: Mocniny goniometrických funkcí se obvykle zapisují takto

$$\int \sin^5(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\cos(x) + \tfrac{2}{3}\cos^3(x) - \tfrac{1}{5}\cos^5(x)$$

Tento zápis je přehlednější, takže ho doporučujeme používat. Zápis typu $(\sin(x))^2$ jsme zde zvolili proto, že význam obvyklého zápisu $\sin^2(x)$ by mohl též znamenat zkratku zápisu $\sin(\sin(x))$ a nechtěli jsme čtenáře mást.

8. Spočítáme integrál

$$\int \cos^9(x)\,\mathrm{d}x$$

V předchozím příkladu bylo podstatné, že sinus byl umocněn na lichou mocninu, úpravou (7.10) jsme dostali sudou mocninu a do té jsme snadno dosadili ze vzorce $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Zde máme lichou mocninu kosinu a nabízí se analogická úprava

$$\cos^9(x) = \cos^8(x)\cos(x) = (1-\sin^2(x))^4\cos(x) \qquad (7.11)$$

a tedy substituce $y = \sin(x)$, $\mathrm{d}y = \cos(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int \cos^9(x)\ \mathrm{d}x = \int (1-\sin^2(x))^4\ \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int (1-y^2)^4\,\mathrm{d}y$$

Před integrací umocníme dvojčlen v závorce

$$\int (1-y^2)^4\,\mathrm{d}y = \int 1-4y^2+6y^4-4y^6+y^8\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} y-\tfrac{4}{3}y^3+\tfrac{6}{5}y^5-\tfrac{4}{7}y^7+\tfrac{1}{9}y^9$$

Výsledek získáme zpětnou substitucí

$$\int \cos^9(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \sin(x) - \tfrac{4}{3}\sin^3(x) + \tfrac{6}{5}\sin^5(x) - \tfrac{4}{7}\sin^7(x) + \tfrac{1}{9}\sin^9(x)$$

Zkoušku provedeme zderivováním výsledku a úpravou (7.11).

7.7 Úlohy na procvičení

1. Vypočtěte integrál
$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

2. Vypočtěte integrál
$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+2)^3}\,\mathrm{d}x$$

3. Nalezněte primitivní funkci k funkci f a udělejte zkoušku
$$f(x) = \sin^4(x)\cos^5(x)\,\mathrm{d}x$$

4. Vypočtěte integrál
$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\sqrt{2-\cos(x)}}\,\mathrm{d}x$$

5. Nalezněte primitivní funkci k funkci f a udělejte zkoušku
$$f(x) = \frac{\log(x)+1}{x(\log(x)-1)}$$

(*6) Ukažte, že výsledky příkladu 4 v kapitole 7.6 jsou stejné.

7.8 Eulerovy substituce

Ukážeme použití substituční metody na následujících integrálech. Volba substituce je intuitivní jen v prvním případě, v dalších případech je daná zkušeností starších generací matematiků. Podstatné je, že všechny substituce vedou na integrál z racionální funkce, který umíme počítat. Cílem tohoto odstavce není *umět zvolit substituci*, budeme se soustředit jen na to, jak *substituci provést*.

O tom, jak zvolit substituci, pojednáme na konci kapitoly.

7.8.1 Příklady na neurčitý integrál

Spočítáme následující integrály.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x \quad \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x \quad \int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \quad \int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

1. Spočítáme integrál $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

   Použijeme substituci $y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.

   Vyjádříme inverzní funkci (podrobnosti necháme na čtenáři) $x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$.
   Spočítáme derivaci (podrobnosti jsou opět na čtenáři) $\mathrm{d}x = \frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$.
   Provedeme substituci

   $$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \int y\,\frac{4y}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

   Spočítáme integrál (podrobnosti v kapitole 5.5, kde je tento integrál spočítán dvěma různými způsoby)

   $$\int \frac{4y^2}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} 2\operatorname{arctg}(y) - \frac{2y}{y^2+1}$$

   Provedeme zpětnou substituci

   $$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \frac{2\sqrt{(x+1)/(1-x)}}{(x+1)/(1-x)+1}$$

a upravíme na (opět podrobnosti necháme na čtenáři)

$$2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}$$

Dostaneme tak výsledek

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \sqrt{1-x^2}$$

Případnou zkoušku provedeme zderivováním a úpravou.

2. Máme spočítat integrál $\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$.
   Použijeme substituci
   $$y = 2x + \sqrt{1+4x^2} \tag{7.12}$$
   Úpravami vyjádříme inverzní funkci
   $$x = \frac{y^2-1}{4y} \tag{7.13}$$
   Spočítáme derivaci, vztah je vhodné upravit na $x = \frac{y}{4} - \frac{1}{4y}$, pak je $\mathrm{d}x = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4y^2})\,\mathrm{d}y$ a po úpravě zpátky na zlomek $\mathrm{d}x = \frac{y^2+1}{4y^2}\,\mathrm{d}y$
   Nyní potřebujeme provést substituci. To můžeme udělat mechanicky
   $$\sqrt{1+4x^2} = \sqrt{1+4\left(\frac{y^2-1}{4y}\right)^2}$$
   a pak si užít úpravu výrazu. Další možností je všimnout si, že ze vztahu (7.12) lze vyjádřit odmocninu $\sqrt{4x^2+1} = y - 2x$ a na pravé straně dosadit z (7.13). Po úpravě dostaneme
   $$\sqrt{4x^2+1} = y - 2\frac{y^2-1}{4y} = \frac{2y^2-(y^2-1)}{2y} = \frac{y^2+1}{2y}$$
   Provedeme substituci
   $$\int \sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{S}} \int \frac{y^2+1}{2y}\frac{y^2+1}{4y^2}\,\mathrm{d}y$$

Spočítáme integrál

$$\begin{aligned}\int \frac{(y^2+1)^2}{8y^3}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{y^4+2y^2+1}{8y^3}\,\mathrm{d}y = \int \frac{y}{8}+\frac{1}{4y}+\frac{1}{8y^3}\,\mathrm{d}y\\ &\overset{C}{=} \frac{y^2}{16}+\frac{1}{4}\log(y)-\frac{1}{16y^2}\end{aligned}$$

Provedeme zpětnou substituci

$$\frac{(2x+\sqrt{4x^2+1})^2}{16}+\frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+1})-\frac{1}{16(2x+\sqrt{4x^2+1})^2}$$

Výsledek je ještě možné upravit. Všimneme si, že platí – úprava známá z výpočtu limit –

$$\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2x-\sqrt{4x^2+1}}{4x^2-(4x^2+1)}=\frac{2x-\sqrt{4x^2+1}}{-1}=-2x+\sqrt{4x^2+1}$$

Pomocí této úpravy je možné upravit

$$(2x+\sqrt{4x^2+1})^2-\frac{1}{(2x+\sqrt{4x^2+1})^2}=(2x+\sqrt{4x^2+1})^2-(-2x+\sqrt{4x^2+1})^2$$

a posléze s použitím vzorců $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

$$(2x+\sqrt{4x^2+1})^2-(-2x+\sqrt{4x^2+1})^2=4x\sqrt{4x^2+1}$$

Dosazením do výsledku integrálu dostaneme

$$\int \sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+1})$$

Chcete-li si procvičit derivování a úpravu výrazů, proveďte zkoušku.

3. Spočítáme integrál $\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.
Použijeme substituci $y=\mathrm{tg}(x/2)$ a vztahy

$$\sin(x)=\frac{2y}{y^2+1} \qquad \cos(x)=\frac{1-y^2}{1+y^2} \tag{7.14}$$

Spočítáme inverzní funkci k substituci. Tady je dobré poznamenat, že integrovaná funkce je definovaná na $\mathbb{R}$, ale na tomto intervalu nemá zvolená substituce inverzní funkci. Inveryní funkce: $x = 2\operatorname{arctg}(y)$ je jen pro $x \in (-\pi, \pi)$. Z inverzní funkce pak vyjádříme $\mathrm{d}x = \frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$ a provedeme substituci

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\mathrm{S}} \int \frac{1}{2+(1-y^2)/(1+y^2)}\frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$$

upravíme (úpravy necháme na čtenáři) a zintegrujeme (zde jen dosadíme do vzorce)

$$\int \frac{1}{2+(1-y^2)/(1+y^2)}\frac{2}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{y^2+3}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}$$

Výsledek dostaneme zpětnou substitucí

$$\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}$$

Ještě poznámku k intervalu pro x: V úvodní kapitole jsme zaváděli primitivní funkci na intervalu, ale většinou jsme se o něj při výpočtu nestarali. Tady jsme našli primitivní funkci na intervalu daného substitucí, tedy na $(-\pi, \pi)$. Integrovaná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, a má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Všimneme si, že je integrovaná funkce periodická a náš výsledek snadno použijeme i na další intervaly. Primitivní funkci na $\mathbb{R}$ pak získáme „slepením“ primitivních funkcí přes jednotlivé intervaly. Pozor ale na rychlý a nesprávný závěr, že výsledná primitivní funkce bude také periodická.

TODO: VYSVĚTLIT „LEPENÍ“ PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ, ASI V SAMOSTATNÉ KAPITOLE.

4. Spočítáme integrál

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Mohli bychom použít substituci stejnou jako v minulém příkladě a dostali bychom integrál

$$\int \frac{1}{1+(2y/(y^2+1))^2}\frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

který bychom nejdříve rozšířili výrazem $1+y^2$, vydělili a zintegrovali

$$\int \frac{2y^2+2}{5y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{5} + \frac{8}{25}\frac{1}{y^2+1/5}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} \frac{2}{5}y + \frac{8\sqrt{5}}{25}\operatorname{arctg}(y\sqrt{5})$$

Zpětnou substitucí bychom dostali

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{5}\,\mathrm{tg}(x/2) + \frac{8\sqrt{5}}{25}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{5}\,\mathrm{tg}(x/2))$$

V tomto případě je možné použít i substituci $t = \mathrm{tg}(x)$ a vztahy

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{\mathrm{tg}^2(x)}{1+\mathrm{tg}^2(x)} \\
\cos^2(x) &= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(x)} \\
\sin(x)\cos(x) &= \frac{\mathrm{tg}(x)}{1+\mathrm{tg}^2(x)}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Integrál po substituci potom bude

$$\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

po úpravě

$$\int \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t$$

po integraci (vytkneme polovinu a dosadíme do vzorce)

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1/2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}t)$$

a po zpětné substituci

$$\int \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(x))$$

Primitivní funkci jsme našli na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Na $\mathbb{R}$ ji rozšíříme podobně jako v předchozím příkladě.

Zkoušku opět uděláme zderivováním a úpravou.

7.8.2 Příklady na určitý integrál

K neurčitým integrálům z minulé kapitoly spočítáme integrály určité.

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x \quad \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{3\pi/2}\frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \quad \int_{-\pi}^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

1. Integrál
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$
převedeme substitucí $y=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$. na integrál
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{4y^2}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$$
který spočítáme
$$\begin{aligned}
&= \left[2\operatorname{arctg}(y)-\frac{2y}{y^2+1}\right]_0^{+\infty}\\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(2\operatorname{arctg}(y)-\frac{2y}{y^2+1}\right)-\lim_{y\to 0^+}\left(2\operatorname{arctg}(y)-\frac{2y}{y^2+1}\right)\\
&= \pi-0-(0-0)=\pi
\end{aligned}$$

2. Integrál
$$\int_{0}^{1}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$
převedeme substituci $y=2x+\sqrt{1+4x^2}$ na integrál
$$\int_{1}^{2+\sqrt{5}}\frac{(y^2+1)^2}{8y^3}\,\mathrm{d}y$$
který spočítáme
$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{y^2}{16}+\frac{1}{4}\log(y)-\frac{1}{16y^2}\right]_1^{2+\sqrt{5}}\\
&= \frac{(2+\sqrt{5})^2}{16}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})-\frac{1}{16(2+\sqrt{5})^2}-0
\end{aligned}$$

a upravíme pomocí $1/(2+\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}$ na

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2+\sqrt{5})^2}{16} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{16(2+\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{(2+\sqrt{5})^2}{16}) - \frac{(-2+\sqrt{5})^2}{16} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) \\
&= \frac{4\sqrt{5}}{16} - \frac{-4\sqrt{5}}{16} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})
\end{aligned}$$

3. Integrál
$$\int_0^{3\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$
chceme spočítat substitucí $y = \mathrm{tg}(x/2)$.

Nejde to přímo, substituce převádí interval $x \in (-\pi, \pi)$ na interval $y \in (-\infty, +\infty)$[2], proto můžeme udělat substituci jen přes interval $(0, \pi)$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{y^2+3}\,\mathrm{d}y$$

Vyjde

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

K výpočtu integrálu v mezích $(0, 3\pi/2)$ rozdělíme interval na dvě části

$$(0, 3\pi/2) = (0, \pi/) \cup (\pi/, 3\pi/2)$$

spočítáme integrál přes každou část a použijeme aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x \quad (7.16)$$

[2] Nakreslete graf $y = \mathrm{tg}(x/2)$ případně $x = 2\,\mathrm{arctg}(y)$!

Pro výpočet integrálu v mezích $(\pi, 3\pi/2)$ využijeme to, že je kosinus periodická funkce, odkud plyne (posuneme interval o jednu periodu)

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

Použitím stejné substituce jako výše pak dostaneme

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{2}} \frac{2}{y^2+3}\,\mathrm{d}y$$

a dále

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{-1/\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dosazením do (7.16) dostaneme výsledek

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{y^2+3}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

4. Integrál

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

chceme spočítat substituci $t = \operatorname{tg}(x)$, která převádí interval $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ na interval $t \in (-\infty, \infty)$. Proto opět rozdělíme interval na díly, tentokrát čtyři

$$(-\pi, 2\pi) = (-\pi, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$$

spočítáme integrály přes jednotlivé intervaly a použijeme aditivitu integrálu

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Podobně přes další intervaly

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$
$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = 0 - (-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Sečtením výsledků (tj. použitím aditivity určitého integrálu vzhledem k intervalu) dostaneme

$$\int_{-\pi}^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}$$

Poznámka k příkladům 3, 4: Použitá aditivita je lépe vidět na Riemannově integrálu periodické funkce.

7.8.3 Poznámky k substitucím

Použité substituce nazýváme Eulerovy. Na integrály obsahující výraz s odmocninou z kvadratického výrazu $\sqrt{ax^2+bx+c}$ je možné použít substituce

$$y = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c} \text{ v případě } a > 0 \tag{7.17}$$
$$yx + \sqrt{c} = \sqrt{ax^2+bx+c} \text{ v případě } c > 0 \tag{7.18}$$
$$y = \sqrt{(x-x_1)/(x-x_2)} \text{ v případě, že má výraz } ax^2+bx+c \text{ dva reálné kořeny } x_1, x_2 \tag{7.19}$$

My jsme použili substituci (7.17) na příklad 1 a substituci (7.19) na příklad 2.

Substituce za $\mathrm{tg}(x/2)$ je spolu se vztahy (7.14) univerzální substituce pro integrály obsahující goniometrické funkce. Substituci za $\mathrm{tg}(x)$ je vhodné použít v případě, že není nutné ve vztazích (7.15) odmocňovat. Takovým byl i příklad 4.

7.9 Úlohy na procvičení

1. Nalezněte primitivní funkci k $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ a udělejte zkoušku.

(*2) Odvoďte vztahy (7.14) a (7.15).
V textu jsme spočítali primitivní funkci k $f(x) = 1/(2 + \cos(x))$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Popište primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

3. Nalezněte primitivní funkci k funkci f. Na jakém intervalu jste primitivní funkci nalezli? Má funkce f primitivní funkci na větším intervalu?

$$f(x) = \tfrac{1}{2+\sin(x)-\cos(x)}$$

4. Převeďte integrál vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce. Na jakém intervalu má integrovaná funkce funkci primitivní a na jakém ji vámi zvolenou substitucí vypočtete?

$$\int \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x)+\cos(x)+2}\,\mathrm{d}x$$

Kapitola 8

Úlohy na procvičení

1. Integrál
$$\int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$$
vypočtěte
   (a) metodou per partes, součin vyrobte vložením jedničky,
   (b) substitucí $t = \arcsin(x)$.
2. Integrál
$$\int_1^4 \log(x)\,\mathrm{d}x$$
vypočtěte substitucí i metodou per partes (podobně jako v minulém příkladě).
3. Integrál
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
vypočtěte substitucí $x = \sin(t)$.
4. Integrál
$$\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
vypočtěte
   (a) substitucí $t = 1 - x^2$,

   (b) substitucí $x = \sin(t)$

5. Proč není substituce $t = 1 - x^2$ vhodná k výpočtu integrálu v úloze 3?

6. Vypočtěte integrál
$$\int_0^2 \frac{\sqrt{4x+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

7. Vypočtěte integrál
$$\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

Rejstřík