Níže je nápověda ke příkladům na 23.11., které jsme nestihli procvičit.

Příklady na 30.11. zveřejním na začátku příštího týdne (do úterka 13.11.).

---

(1) Máme vypočítat limitu výrazu

$$V = \frac{x+2}{x+\sqrt[3]{x+10}} \quad \text{pro } x \to -2.$$

Použijme vzorec

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

do kterého dosadíme

$$a = x, \quad b = \sqrt[3]{x+10}.$$

Dostaneme

$$x^3 + x + 10 = \left(x + \sqrt[3]{x+10}\right)\underbrace{\left(x^2 - x(x+10)^{1/3} + (x+10)^{2/3}\right)}.$$

Výraz V rozšíříme výrazem,

dostaneme

$$V = \frac{(x+2)\left(x^2 - x\,(x+10)^{1/3} + (x+10)^{2/3}\right)}{x^3 + x + 10}$$

Vydělíme $(x^3+x+10) : (x+2)$,

dostaneme $x^2 - 2x + 5$ (beze zbytku).

Dostáváme

$$V = \frac{x^2 - x\,(x+10)^{1/3} + (x+10)^{2/3}}{x^2 - 2x + 5}$$

Limitu nyní spočítáme dosazením

$x = -2$ (proč?)

a dostaneme $\frac{12}{13}$.

(2) Máme vypočíst limitu výrazu

$$V = -x + \sqrt[3]{x^3 + 12x^2}$$

pro $x \to +\infty$.

Použijeme vzorec $a^3 - b^3 = \dots$, do kterého dosadíme

$$a = \sqrt[3]{x^3 + 12x^2}, \quad b = x.$$

Rozšířením výrazu V výrazem $a^2 + ab + b^2$ dostaneme

$$V = \frac{12x^2}{(x^3 + 12x^2)^{2/3} + x(x^3 + 12x^2)^{1/3} + x^2}.$$

Dále výraz rozšíříme $1/x^2$ a upravíme. Dostaneme:

$$V = \frac{12}{\left(1 + \frac{12}{x}\right)^{2/3} + \left(1 + \frac{12}{x}\right)^{1/3} + 1}.$$

Nyní použijeme věty o limitě součtu, složené funkce, podílu a limitu $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$

a dostaneme

$$V \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{12}{(1+0)^{2/3} + (1+0)^{1/3} + 1} = 4.$$