

Písemná část zkoušky z předmětu AN1E

15. ledna 2016

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Napište definici pojmu inkluze (podmnožiny) a vysvětlete, jak jej lze použít k řešení rovnice

$$\sqrt{1 + 2x^2} = 2x + 1.$$

Rovnici vyřešte.

2. Napište definici funkce rostoucí na intervalu a vysvětlete, jak tento pojem využijete k řešení nerovnice

$$\sqrt{1 + 2x^2} \geq 2x + 1.$$

Nerovnici vyřešte.

3. (a) Řešte rovnici s neznámou x a parametrem y , uveďte počet řešení v závislosti na hodnotě y a napište tato řešení:

$$y = 2^{x-x^2}.$$

- (b) Na základě výsledku 3a rozhodněte, zda je funkce $f : x \mapsto 2^{x-x^2}$ prostá a určete její obor hodnot. Pokud existuje inverzní funkce f^{-1} , napište ji.

4. Napište nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (pro jaká čísla platí?) a použijte ji k důkazu monotonie posloupnosti $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$.
5. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{6x^2+5x+1}{2x+1}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na množinu \mathbb{R} .
- 5b. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na množinu \mathbb{R} .
6. Určete definiční obory funkcí f , g a zjistěte, zda je lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru.

$$f : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{\ln(x + 3)} \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \sqrt{x + 4}}$$

7. Vypočítejte limitu funkce f v bodě 1 a funkce g v bodech $\pm\infty$.

$$f : x \mapsto \frac{(\sqrt{3+x} + 2)(\sqrt{8+x} - 3)}{\sin(x+1)\sin(x^2-1)} \quad g : x \mapsto x + \sqrt{1+x+x^2}$$

8. Napište definici derivace funkce v bodě a použijte ji k výpočtu derivace funkce $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Obdobné příklady pro funkce: log, exp, sin, cos.

9. Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce a použijte ji k odvození derivace funkce arctg.

Obdobné příklady pro funkce: arcsin, arccos, arccotg, log.

10. Pro interval $I = (-1, 2]$ a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Na základě předchozí úlohy rozhodněte, zda nabývá funkce f na intervalu I maximální a minimální hodnoty.

10b. Pro interval $I = (-1, 3)$ a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto x^3 - 12x$$

Na základě předchozí úlohy rozhodněte, zda nabývá funkce f na intervalu I maximální a minimální hodnoty.

11. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce a použijte ji k určení maximálních intervalů, na nichž je funkce f rostoucí.

$$f : x \mapsto 2^{-x+1}(2x + 1)$$

11b. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce a použijte ji k určení maximálních intervalů, na nichž je funkce f klesající.

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$$

12. Ukažte, že má funkce $f : x \mapsto 2^{-x}$ v bodě ∞ limitu rovnu 0 – napište definici a ukažte, že jí funkce f vyhovuje.

13. Ukažte, že má funkce $f : x \mapsto x^2$ v bodě $-\infty$ limitu rovnu ∞ – napište definici a ukažte, že jí funkce f vyhovuje.

14. Napište definici spojitosti funkce f v bodě 0 zprava a ukažte, že funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ této definici vyhovuje.

15. Napište definici spojitosti funkce f v bodě $x_0 = -1$, znegujte ji a ukažte, že následující funkce této negaci vyhovuje

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 - 2x - x^2 & x < -1, \\ 2 + x & x \geq -1. \end{cases}$$

16. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jejím bodě $[-1, f(-1)]$ a napište její rovnici

$$f : x \mapsto \log \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

16b. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jejím bodě $[2, f(2)]$ a napište její rovnici

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+7}}{(x-1)^2}.$$