

Druhá semestrální práce z předmětu AN1E

1. Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a parametrem $y \in \mathbb{R}$ a diskutujte počet řešení v závislosti na hodnotě y .

Návod: pokud si s řešením nevíte rady, řešte nejdříve pro konkrétní číselnou hodnotu y a pak v obecném případě postupujte obdobně.

(a)

$$y = x^2 - 3x + 5$$

(b)

$$y = \frac{3 - x}{2x + 1}$$

(c)

$$y = \log(2x - 1)$$

(d)

$$y = 10^{1-3x}$$

(e)

$$y = 10^{x^2+1}$$

body: 8/5/3

2. Pro následující elementární funkce určete jejich definiční obor a obor hodnot a dále určete, které z nich jsou prosté. Vysvětlete, jak souvisí výsledky tohoto a předchozího příkladu.

(a)

$$f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$$

(b)

$$f : x \mapsto \frac{3 - x}{2x + 1}$$

(c)

$$f : x \mapsto \log(2x - 1)$$

(d)

$$f : x \mapsto 10^{1-3x}$$

(e)

$$f : x \mapsto 10^{x^2+1}$$

body: 8/5/3

3. Určete definiční obor a obor hodnot elementární funkce f . Pro která $y \in \mathbb{R}$ je množina vzorů $f^{-1}(\{y\})$ dvouprvková?

$$f : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Upozornění: rozlišujte případy, kdy je rovnice $y = 2x/(x^2 + 1)$ s neznámou x a parametrem y kvadratická a kdy je lineární. body: 6/4/2

4. Načrtněte graf funkce splňující všechny vlastnosti (a)-(e)
- (a) její definiční obor je interval $[-3, 5]$,
 - (b) je rostoucí na intervalu $[1, 3]$ a klesající na intervalu $[-3, 1]$,
 - (c) je konvexní na intervalu $[-3, 3]$,
 - (d) v bodě $x = 1$ nemá globální minimum,
 - (e) na svém definičním oboru nesplňuje vlastnost nabývání mezihodnot.

body: 6/4/2

5. Načrtněte graf funkce splňující všechny vlastnosti (a)-(c)
- (a) její definiční obor je interval $[0, 4]$,
 - (b) je zdola omezená, ale není omezená
 - (c) na intervalu $[0, 4)$ není monotonní a je na tomto intervalu konvexní.

Návod: načrtněte graf nejdříve na intervalu $[0, 4)$. body: 6/4/2

6. Načrtněte graf funkce a určete její obor hodnot. Dále určete intervaly maximální vzhledem k inkluzi, na nichž funkce splňuje Darbouxovu vlastnost.

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 & x \in [0, 2) \\ 2^{2-x} & x \in [2, 3) \\ \frac{1}{x-1} & x \in [3, 6] \end{cases}$$

body: 6/4/2

7. Nalezněte $x \in \mathbb{R}$ vyhovující nerovnici

(a)

$$\sqrt{x^2 + 3} > 3x - 1$$

(b)

$$\sqrt{7 - x} \geq 1 - x$$

(c)

$$2x + \sqrt{12 - 2x} \leq 4$$

body: 6/4/2

8. Řešte nerovnici 7b graficky – do jednoho grafu načrtněte graf levé i pravé strany a vypočtěte průsečík(y) grafů. Podobně řešte rovnici 7c.

body: 3/2/1

9. Určete pro která $n \in \mathbb{Z}$ je splněná nerovnice

(a)

$$2^n > 20$$

(b)

$$2 \cdot 2^{2^n} > 20$$

(c)

$$0.1^n > 12$$

body: 5/3/1

10. Pro funkci $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ a interval $I = (-2, 2]$ určete

$$I_1 = f(I), \quad I_2 = f^{-1}(I_1), \quad I_3 = f^{-1}(I), \quad I_4 = f(I_3).$$

body: 6/4/2