

První série úloh ze středoškolské matematiky

<http://kap.fp.tul.cz/~simunkova>

1. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot zjistěte, zda jsou ekvivalentní výroky (symbol \neg označuje negaci, tedy $\neg a$ značí negaci výroku a).

(a) Výrok: $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)$ s výrokem $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

(b) Výrok: $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ s výrokem $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.

(c) Výrok $\neg(a \Rightarrow b)$ s výrokem $a \wedge \neg b$.

(d) Výrok $(a \vee b) \wedge c$ s výrokem $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

2. Ukažte, že následující výroky jsou pravdivé pro jakékoliv pravdivostní ohodnocení výroků a, b, c

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow a), \quad (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$$

3. Zapište pomocí jednoho výroku ($a, \neg a, 1$ nebo 0) následující výroky: $a \vee 1, a \wedge 1, a \vee 0, a \wedge 0, a \vee a, a \vee \neg a, a \wedge a, a \wedge \neg a$. Symboly 1 , popřípadě 0 , označují pravdivý, popřípadě nepravdivý, výrok.

4. Znegujte výroky a rozhodněte o jejich platnosti. Svůj závěr řádně zdůvodněte. Výroky i jejich negace napište slovy.

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x - 4 > 0)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x - 4 > 0)$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin x > -1)$

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\sin x > -1)$

(e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin x \geq -1)$

(f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\sin x \geq -1)$

5. Na reálné ose vyznačte množiny

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 \geq 0\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x - (2x + 5) \leq -4\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 < 0\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x + (2x + 5) \leq -4\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (2x + 5 \geq 0) \wedge (x - (2x + 5) \leq -4)\},$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} : (x + (2x + 5) \leq -4) \wedge (2x + 5 < 0)\},$$

$$A \cap B, \quad C \cap D, \quad E \cup F$$

6. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující rovnici

(a)

$$x - |2x + 5| = -4$$

(b)

$$|x + 2| - |2x - 3| = 1$$

(c)

$$|3x - 1| + |x - 3| = 8$$

7. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující nerovnici

(a)

$$x - |2x + 5| \leq -4$$

(b)

$$|x + 2| - |2x - 3| \geq 1$$

(c)

$$|3x - 1| + |x - 3| > 8$$

8. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{Z}$ splňující rovnici

(a)

$$\frac{10 - 17n}{(n + 1)!} + \frac{4}{(n - 1)!} = 0$$

(b)

$$\frac{(2n + 1)!}{(2n)!} + \frac{(3n)!}{(3n - 1)!} = \frac{(n + 1)!}{2(n!)} + 50$$

(c)

$$(n + 2)!(24 + 6n) = (n + 4)!$$

(d)

$$(n + 1)! + (n + 2)! = (n + 3)!$$