Požadavky k ústní zkoušce z AN1E

20. ledna 2017

Definice, věty bez důkazů:

1. Třináct axiomů (vlastností) reálných čísel. Racionální čísla mají prvních dvanáct, nemají vlastnost suprema (např. množina $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ nemá v množině racionálních čísel supremum.

2. Definice monotonní funkce. Definice Darbouxovy vlastnosti funkce (tj. vlastnosti nabývání mezihodnot). Tři způsoby řešení nerovnic: grafické, úpravami a použitím vlastnosti nabývání mezihodnot [3ZP].

3. Okolí bodu a definice limity funkce vlastní/nevlastní ve vlastním/nevlastním bodě. Demonstrace těchto definic na příkladech: log v bodě nula zprava a v nekonečnu; exponenciální funkce v plus a mínus nekonečnu; $x \mapsto \frac{1}{x}$ v plus a mínus nekonečnu a v nule zprava a zleva; arctg v plus a mínus nekonečnu.

4. Odvození základní limity $\sin x/x \to 1$ pro $x \to 0$ z nerovností ploch na jednotkové kružnici.

5. Nerovnost $\exp x \geq 1 + x$ a její demonstrace na grafu exponenciální funkce (graf exponenciální funkce se základem $e \doteq 2.71828$ je nad přímkou $y = 1 + x$ a dotýká se jí v bodě $[0, 1]$).
   Odvození základní limity $(\exp x - 1)/x \to 1$ pro $x \to 0$ z této nerovnosti.
   Odvození limit $\log(1 + x)/x \to 1$ pro $x \to 0$ a $\log y/(y - 1) \to 1$ pro $y \to 1$.

6. Definice derivace funkce f v bodě x_0 jako limita podílu $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ pro $h \to 0$. Geometrický význam tohoto podílu (směrnice přímky procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$). Derivace funkce v bodě x_0 a rovnice tečny ($y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$). Tečna jako graf lineární funkce, která dobře aproximuje funkci f v okolí bodu x_0.

7. Příklad funkce, která je definovaná na $\mathbb{R}$, má na $\mathbb{R}$ derivaci, která není spojitá (viz následující funkce). Výpočet derivace funkce v bodě nula

$$x \mapsto \begin{cases} x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

8. Lemma 5.2.13 o souvislosti lokálního extrému s nulovou derivací. Příklad funkce, která v bodě, ve kterém má extrém, nemá derivaci (např. $x \mapsto |x|$ a bod 0). Příklad funkce, která nemá extrém v bodě, ve kterém má nulovou derivaci (např. $x \mapsto x^3$ a bod 0).

9. Weierstrassova věta 4.3.31 o existenci extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu. Příklad spojité funkce, která nemá na intervalu extrém (např. $x \mapsto x$ na $(-1, 2)$). Příklad funkce, která nemá na uzavřeném intervalu extrém (např. interval $[0, 2]$ a funkce, která číslu $x \in [0, 1)$ přiřadí číslo $x + 2$, číslu 1 přiřadí číslo 2 a číslu $x \in (1, 2]$ přiřadí číslo $x - 1$ – nakreslete graf).

Tvrzení i s důkazy:

1. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem 1.3.28, důkaz stačí pro průměr ze dvou, čtyř, osmi a sedmi čísel a náznak, jak se dělá pro jiné počty čísel.

2. Posloupnosti

   (a) Lemma 2.1.2 o jednoznačnosti limity.

   (b) Poznámka 2.1.13 o limitě konstantní posloupnosti.

   (c) Věta 2.1.19 o limitě monotonní omezené posloupnosti. Složitější důkaz než u 2a, 2b, 2d, zato hodně důležitá věta.

   (d) Lemma 2.1.21 o omezenosti konvergentní posloupnosti.

   (e) Věta 2.1.22 o limitách a aritmetických operacích. Z důkazu jen vztahy (2.5), (2.6), definici limity a povídání o tom, které veličiny jsou malé a proč.

   (f) Limita geometrické posloupnosti v závislosti na hodnotě kvocientu q. Znát (nebo úvahou z grafu funkce $n \mapsto q^n$ odvodit) její hodnotu a ukázat přímo z definice, že je správná (věnovali jsme tomu skoro celou přednášku).

3. Derivace

(a) Věta 5.1.10 o spojitosti funkce majjící konečnou derivaci a příklad 5.1.11 o nespojité funkci mající nekonečnou derivaci a příklad 5.1.12 o spojité funkci nemající derivaci.

(b) Věta 5.2.1 o derivaci součtu a rozdílu.

(c) Věta 5.2.5 o derivaci součinu a podílu.

(d) Příklad 5.2.10 o ekvivalentní definici derivace.

(e) Rolleova věta o střední hodnotě 5.2.16.

(f) Lagrangeova věta o střední hodnotě 5.2.18.

(g) Věta 5.2.22 o monotonii a derivaci.

(h) Důsledek 5.2.23 a poznámka 5.2.24.

(i) Druhá věta o monotonii a derivaci (v [JV] není, hodí se na funkce typu $x \mapsto x^3$ která je na $\mathbb{R}$ rostoucí přestože má v bodě nula nulovou derivaci).

Reference

[JV] `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf` (na mém webu je klikací odkaz)

[3ZP] `http://kap.fp.tul.cz/~simunkova/fond_f/fond_F_simunkova.pdf` (na mém webu je klikací odkaz)