

Písemná část zkoušky z předmětu AN1E
20. ledna 2017

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Napište definici pojmu inkluze (podmnožiny) a vysvětlete, jak jej lze použít k řešení rovnice. Rovnici vyřešte.

$$\sqrt{1 + 2x^2} = 2x + 1$$

2. Napište definici funkce rostoucí na intervalu a vysvětlete, jak tento pojem využijete k řešení nerovnice. Nerovnici vyřešte.

$$\sqrt{1 + 2x^2} \geq 2x + 1$$

- 2b. Napište definici funkce rostoucí na intervalu a vysvětlete, jak tento pojem využijete k řešení nerovnice. Nerovnici vyřešte.

$$2^{-x^2} \geq 2^{-4}$$

3. Vysvětlete, jak vyřešíte nerovnici použitím vlastnosti nabývání mezihodnot (Darbouxovy vlastnosti) a poté nerovnici vyřešte.

$$3^{x+2} + 3^{-x} \geq 10$$

4. Napište nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (pro jaká čísla platí?) a použijte ji k důkazu monotonie posloupnosti $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$.

5. Napište nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (pro jaká čísla platí?) a použijte ji k důkazu monotonie posloupnosti

$$a_1 = 3 \quad a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right).$$

6. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{6x^2+5x+1}{2x+1}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na množinu \mathbb{R} .
- 6b. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{x-2}{2x^2-3x-2}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na množinu $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.
7. Určete definiční obory funkcí f , g a zjistěte, zda je lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru.

$$f : x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{\ln(x + 3)} \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \sqrt{x + 4}}$$

8. Vypočtěte limitu funkce f v bodě 1 a funkce g v bodech $\pm\infty$.

$$f : x \mapsto \frac{(\sqrt{3+x} + 2)(\sqrt{8+x} - 3)}{\sin(x+1)\sin(x^2-1)} \quad g : x \mapsto x + \sqrt{1+x+x^2}$$

9. Vypočtěte jednostranné limity funkce f v bodech 1 a -2 . Má funkce f v daných bodech oboustrannou limitu?

$$f : x \mapsto \frac{x^4 - 4}{x^3 - 3x + 2}$$

10. Napište definici derivace funkce v bodě a použijte ji k výpočtu derivace funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Obdobné příklady pro funkce: log (přirozený logaritmus), exp, sin, cos.
11. Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce a použijte ji k odvození derivace funkce arctg.
Obdobné příklady pro funkce: arcsin, arccos, arccotg, log.
12. Pro interval $I = (-1, 2]$ a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Na základě předchozí úlohy rozhodněte, zda nabývá funkce f na intervalu I maximální a minimální hodnoty.

- 12b. Pro interval $I = (-1, 3)$ a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto x^3 - 12x$$

Na základě předchozí úlohy rozhodněte, zda nabývá funkce f na intervalu I maximální a minimální hodnoty.

13. Nalezněte maximální (vzhledem k inkluzi) intervaly, na nichž je funkce f rostoucí. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce, kterou při řešení příkladu používáte. (Symbol \log značí přirozený logaritmus.)

$$f : x \mapsto x \log x$$

- 13b. Nalezněte maximální (vzhledem k inkluzi) intervaly, na nichž je funkce f klesající. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce, kterou při řešení příkladu používáte. (Symbol \log značí přirozený logaritmus.)

$$f : x \mapsto x^2 \log x$$

- 13c. Nalezněte maximální (vzhledem k inkluzi) intervaly, na nichž je funkce f klesající. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce, kterou při řešení příkladu používáte.

$$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

14. Ukažte, že má funkce $f : x \mapsto 2^{-x}$ v bodě ∞ limitu rovnu 0 – napište ε - δ definici a ukažte, že jí funkce f vyhovuje (tj. k ε nalezněte δ splňující ...).

15. Ukažte, že má funkce $f : x \mapsto x^2$ v bodě $-\infty$ limitu rovnu ∞ – napište ε - δ definici a ukažte, že jí funkce f vyhovuje (tj. k ε nalezněte δ splňující ...).

16. Napište ε - δ definici spojitosti funkce f v bodě 0 zprava a ukažte, že funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ této definici vyhovuje (tj. k ε nalezněte δ splňující ...)

17. Napište ε - δ definici spojitosti funkce f v bodě $x_0 = -1$, znegujte ji a ukažte, že následující funkce této negaci vyhovuje (tj. nalezněte ε a ukažte, že k němu neexistuje δ ...)

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 - 2x - x^2 & x < -1, \\ 2 + x & x \geq -1. \end{cases}$$

18. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jejím bodě $[-1, f(-1)]$ a napište její rovnici. (Graf funkce kreslit nemusíte, stačí tečnu; Symbol \log značí přirozený logaritmus.)

$$f : x \mapsto \log \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$$

- 18b. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jejím bodě $[2, f(2)]$ a napište její rovnici. (Graf funkce kreslit nemusíte, stačí tečnu).

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+7}}{(x-1)^2}$$

19. Hodnota číselného výrazu $\sqrt{9.2}$ je přibližně rovna třem. Zpřesněte hodnotu bez použití kalkulačky výpočtem derivace funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ v bodě 9.