

Pátá semestrální práce z předmětu AN1E

1. Určete, zda jsou pravdivé následující výroky. Své závěry zdůvodněte.

(a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 5) \Rightarrow (0.5^n < 0.02).$$

(b)

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 5) \Rightarrow (0.5^n > 0.02).$$

(c)

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 6) \Rightarrow (1.5^n < 10).$$

(d)

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 6) \Rightarrow (1.5^n > 10).$$

(e)

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 5) \Rightarrow (|(-0.5)^n - 0| < 0.02).$$

(f)

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 5) \Rightarrow (|(-0.5)^n - 0| > 0.02).$$

Návod: nevíte-li si rady, vraťte se k příkladu 2a,b z první semestrální práce a k příkladu 1d-f ze čtvrté semestrální práce. body: 8/5/3

2. Ukažte, že posloupnost $\{(1 - \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a posloupnost $\{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

Návod: pro první posloupnost použijte nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem na součin $(1 - \frac{1}{n})^n \cdot 1$. Pro druhou posloupnost upravte $1/(1 - \frac{1}{n+1})$ na $1 + \frac{1}{n}$ a použijte monotonii (a kladnost) první posloupnosti, více viz [JV] příklad 3.2.8. body: 8/5/3

3. Vyčíslíte prvních 10 členů posloupnosti

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Návod pro tento a následující dva příklady: studenti kombinace matematika – informatika nechť si napíšou program, studenti, kteří programovat neumí, nechť použijí tabulkový procesor (například excel nebo calc). Vyčíslené členy posloupností neopisujte, vytiskněte je. body: 3/2/1

4. Vyčíslete prvních 10 členů rekurentně zadané posloupnosti

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad a_0 = 1.$$

body: 3/2/1

5. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{8}{a_n^2} \right), \quad a_1 = 1.$$

- (a) Ukažte, že prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ jsou větší než 2. Návod: použijte ag nerovnost na trojici čísel a_n , a_n a $8/a_n^2$.
- (b) Vyjádřete $a_n - a_{n+1}$ pomocí a_n , výraz upravte a ukažte, že nabývá kladných hodnot.
- (c) Z předchozího odvoďte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající.
- (d) Vyčíslete prvních 10 členů posloupnosti.

body: 12/8/4