Zobrazení

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
19. září 2017

1. Ze střední školy znáte příklady *zobrazení* v rovině jako je posunutí, otočení, osová symetrie. Bodu, který nazýváme *vzor* přiřazujeme jeho *obraz*. Předmětem našeho zájmu budou zobrazení, ve kterých jsou vzory i obrazy reálná čísla. Taková zobrazení nazýváme *funkce*. V tomto textu probereme obecné vlastnosti zobrazení (tedy ty, u nichž nepoužíváme speciální vlastnosti reálných čísel – operace sčítání, násobení a relaci uspořádání).

2. Terminologie a značení. Proměnné (tj. vzory a obrazy) i samotné zobrazení budeme zpravidla značit malými písmeny. Vzor budeme často nazývat *bodem*, reálné číslo si pro ten případ můžete představit jako bod na reálné ose. Obraz bodu x v zobrazení f budeme značit $f(x)$. V případě funkcí používáme často pro obraz výraz *funkční hodnota*.

Samotné zobrazení budeme značit $f : x \mapsto f(x)$. Například $f : x \mapsto x^3$. Pokud nepotřebujeme zobrazení pojmenovat, tak jen $x \mapsto x^3$.

Správně bychom měli psát $f : x \mapsto f(x), x \in D$, kde množina D je definiční obor zobrazení f. Například $x \mapsto x^3, x \in \mathbb{R}$. Definiční obor budeme vynechávat v případě, že je roven množině čísel x, pro něž má výraz $f(x)$ smysl. Například napíšeme jen $x \mapsto \log x$ místo $x \mapsto \log x, x \in (0, +\infty)$. Musí být v tom případě jasné z kontextu, z jaké základní množiny body x bereme. V našem případě to budou reálná čísla, ale můžeme si představit situaci, že bychom pracovali v oboru celých čísel nebo komplexních čísel.

Zobrazení je vždy zadáno jako dvojice: definiční obor a předpis. Dvě zobrazení se stejným předpisem, ale odlišným definičním oborem nejsou totožná. Například zobrazení $x \mapsto \log x^2$, $x \mapsto 2\log x$ nejsou totožná, ani $x \mapsto (x^2 - 1)/(x - 1)$, $x \mapsto x + 1$ nejsou totožná, zatímco $x \mapsto \log \sqrt{x}$ a $x \mapsto \frac{1}{2}\log x$ totožná jsou.

Pokud budeme chtít vyjádřit, že definiční obor funkce f je množina X a obrazy jsou prvkem množiny Y, napíšeme: $f : X \to Y$ a budeme říkat, že zobrazení f zobrazuje množinu X do množiny Y. Například parametrické rovnice přímky: $x = 1 - 2t, y = 2 + t, t \in \mathbb{R}$ jsou vlastně zobrazením $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$. Nazveme-li toto zobrazením p, budeme psát $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a $p : t \mapsto (1 - 2t, 2 + t), t \in \mathbb{R}$.

Ještě k terminologii: například zobrazení $x \mapsto x^2$ zobrazuje množinu reálných čísel do množiny reálných čísel, ale zobrazení $g : x \mapsto \sqrt{x}$ nikoliv. Buď říkáme, že g zobrazuje interval $(0, +\infty)$ do množiny reálných čísel nebo také říkáme, že g je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Vidíme, že v přesném vyjadřování matematiků mají někdy význam i předložky.

Grafem zobrazení $f : X \to Y$ je množina uspořádaných dvojic $[x, y] \in X \times Y$ takových, že $x \in X$, $y = f(x)$. Matematickými symboly zapsáno $G = \{[x, y] \in X \times Y : x \in X, y = f(x)\}$.

3. Další pojmy. V [1] najdete další pojmy, které budeme používat.

V poznámkách 1.4.2 si přečtěte o *zúženém* a *rozšířeném* zobrazení.

V označení 1.4.3 si přečtěte o *obrazu* a *vzoru množiny* (v dalším odstavci uvedeme příklad). *Obor hodnot* je speciálním případem obrazu množiny, je to obraz definičního oboru.

V definici 1.4.6 si přečtěte o *konstantním* zobrazení a *identickém* zobrazení.

V definici 1.4.8 si přečtěte o zobrazení X *na* Y, *prostém* zobrazení a *vzájemně jednoznačném* zobrazení.

Definice *složeného* zobrazení je v 1.4.11, příklad složeného zobrazení v příkladu 1.4.14.

4. Obraz množiny. V [1], 1.4.3 je obraz množiny A v zobrazení f definován jako množina obsahující obrazy $f(x)$ pro $x \in A$. Symbolicky zapsáno $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Postup získání obrazu množiny ukážeme na příkladu: $f : x \mapsto x^2$, $A = (1, 2]$. Nakreslete si graf funkce a na něm sledujte následující úvahy. Stačí spočítat obrazy krajních bodů intervalu A: $f(1) = 1$, $f(2) = 4$. Protože pro x mezi 1 a 2 je x^2 mezi 1^2 a 2^2 je $f(A) \subseteq (1, 4]$. Obrázek nás navíc ubezpečuje, že platí rovnost $f(A) = (1, 4]$. Zatím se spokojíme s tvrzením, že je to tak a že je to důsledek axiomu supréma. Později se pokusíme zpochybnit samozřejmost této rovnosti.

V případě stejné funkce f a množiny $B = (-1, 3)$ takto postupovat nemůžeme, protože pro $x \in (-1, 1)$ je $f(x)$ menší než obrazy $(-1)^2$ i 3^2 a není tedy prvkem intervalu $(1, 9)$. Obraz $f(B)$ určíme přímo z grafu: $f(B) = [0, 9)$. Poznamenejme, že interval B je sjednocením dvou intervalů $B = (-1, 0] \cup [0, 3)$ a pro každý tento interval lze jeho obraz určit úvahou jako u intervalu A.

5. Vzor množiny. V [1] je vzor množiny A v zobrazení $f : X \to Y$ definován jako množina obsahující $x \in X$, jejichž obrazje prvkem množiny A. Symbolicky zapsáno $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.

Konkrétní příklady najdete v úloze 5. Pokud je množina A interval, odpovídá vztah $f(x) \in A$ jedné nebo více nerovnicím. Například pro $A = [1, 2)$ je $f(x) \in A$ ekvivalentní se soustavou nerovnic $f(x) \geq 1$, $f(x) < 2$. Pro $A = (1, +\infty)$ je $f(x) \in A$ ekvivalentní s nerovnicí $f(x) > 1$.

Další příklady jsou v úloze 8. Počítáme v ní $f^{-1}(\{y\})$, tedy vzor jednoprvkové množiny $\{y\}$.

Ze střední školy znáte pojem inverzní funkce: *inverzní funkce k funkci* $f : X \to Y$ přiřazuje bodu $y \in Y$ bod $x \in X$ splňující $f(x) = y$ za předpokladu, že takové x existuje právě jedno. Pokud pro některé $y \in Y$ je takových x více než jedno, pak inverzní zobrazení neexistuje.

V případě existence inverzního zobrazení f^{-1} je vzor $f^{-1}(A)$ totožný s obrazem A v tomto inverzním zobrazení. Vzor $f^{-1}(A)$ má ale význam i v případě, že inverzní zobrazení neexistuje.

6. Poznámka k rozdílu mezi obrazem a zobrazením. Často mluvíme například o funkci $\sin x$. Správně bychom měli mluvit o funkci sin a výraz $\sin x$ používat pro funkční hodnotu. V některých případech je toto terminologické rozlišování obtížné, například u funkce $x \mapsto x^2$. Mohli bychom v tom případě mluvit o funkci id^2 (identita na druhou), ale málokdy se to používá. Z těchto důvodů nebude vadit, když budete mluvit o funkci „x na druhou“, ale vždy byste měli vědět, zda zluvíte o funkci nebo o funkční hodnotě.

7. Poznámka o vzájemně jednoznačném zobrazení. V anglicky psané literatuře se používá termín one-to-one; tím se vyjadřuje myšlenka jeden vzor a jeden obraz.

V matematice je vzájemně jednoznačné zobrazení velmi rozšířeným pojmem. Uvedeme několik příkladů. Bod v rovině a jeho souřadnice $[x, y]$. Racionální číslo a množina zlomků, které mají po pokrácení stejný tvar. Reálné číslo a jeho obraz na číselné ose. Často mezi vzorem a obrazem příliš nerozlišujeme. Například mluvíme o bodu $[x, y]$. Je to jako byste místo jmen používali přezdívky.

Úkol: vyjmenujte další příklady.

8. Úkoly.

1. Nakreslete křivky zadané rovnicemi a určete, zda jsou grafem zobrazení se vzorem $x \in \mathbb{R}$ a obrazem $y \in \mathbb{R}$.

   (a) $x^2 + y^2 = 1$

(b) $x + y = 1$

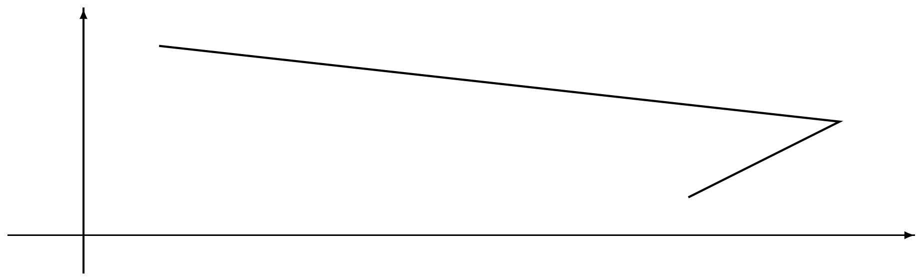
(c) $x^2 + y = 0$

(d) $x + y^2 = 0$

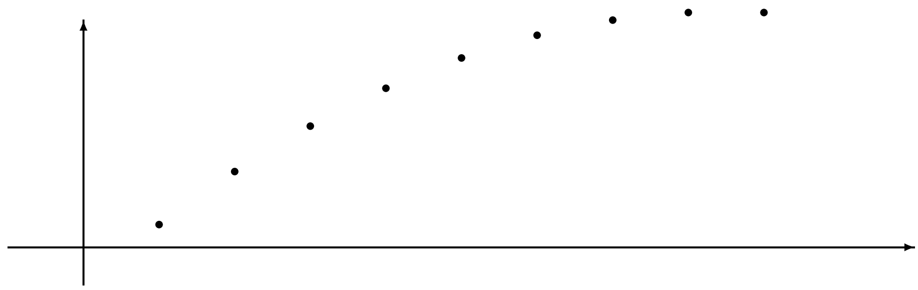
2. Která z následujících množin je grafem funkce (se vzory na vodorovné ose a obrazy na svislé ose)?

(a)

(b)



(c)



3. Načrtněte grafy funkcí f, g. Které z nich je zúžením druhého? Na jakou množinu? Které z nich je rozšířením druhého? Na jakou množinu?

(a)

$$f : x \mapsto 4 \log x^3 \qquad g : x \mapsto 3 \log x^4$$

(b)

$$f : x \mapsto \frac{x^4 - 4}{x^2 + 2} \qquad g : x \mapsto x^2 - 2$$

4. Z grafu funkce f zjistěte počet kořenů rovnice $y = f(x)$ s neznámou x a parametrem y v závislosti na hodnotě parametru y.

(a)

$$f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

(b)

$$f : x \mapsto \frac{2x + 3}{x - 2}$$

(c) U následující funkce uvažujte pouze kořeny na intervalu $[0, 2\pi]$.

$$f : x \mapsto \sin x$$

5. Křivka na obrázku je grafem funkce f. Na osu x vyznačte body x, pro které platí

   (a) $f(x) = a$

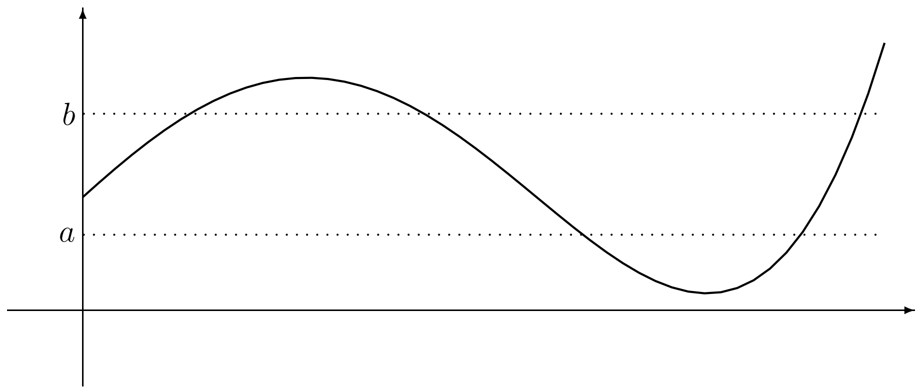
   (b) $f(x) \geq a$

   (c) $f(x) = b$

   (d) $f(x) < b$

   (e) $f(x) \in [a, b)$

   Dále na osu x vyznačte množinu $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\}$ a vzor $f^{-1}(I)$ intervalu $I = [a, \infty)$.
   Pokud to dokážete udělat přehledně, můžete množiny zakreslit do jednoho grafu. V opačném případě si graf vytiskněte vícekrát.



6. Načrtněte graf funkce f a graficky určete obraz $I_1 = f(I)$ intervalu $I = [0, 3)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

   (a)
   $$f : x \mapsto x^2 - 2x$$

   (b)
   $$f : x \mapsto \frac{x - 1}{x + 2}$$

7. Řešte početně rovnici s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a parametrem $y \in \mathbb{R}$ a diskutujte počet řešení v závislosti na hodnotě y. Výsledky výpočtu znázorněte grafem.
   Návod: pokud si s řešením nevíte rady, řešte nejdříve pro konkrétní číselnou hodnotu y a pak v obecném případě postupujte obdobně.

   (a)
   $$y = x^2 - 3x + 5$$

   (b)
   $$y = \frac{3 - x}{2x + 5}$$

   (c)
   $$y = \log(2x - 1)$$

   (d)
   $$y = 10^{1-3x}$$

(e)

$$y = 10^{x^2+1}$$

8. Pro následující elementární funkce určete jejich definiční obor a obor hodnot a dále určete, které z nich jsou prosté. Vysvětlete, jak souvisí výsledky tohoto a předchozího příkladu.

   (a)
   $$f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$$

   (b)
   $$f : x \mapsto \frac{3 - x}{2x + 1}$$

   (c)
   $$f : x \mapsto \log(2x - 1)$$

   (d)
   $$f : x \mapsto 10^{1-3x}$$

   (e)
   $$f : x \mapsto 10^{x^2+1}$$

9. Nalezněte složená zobrazení $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ (včetně jejich definičních oborů). Které z nich má předpis $\frac{x}{4+3x}$ a které $\frac{2+x}{2+3x}$?

$$f : x \mapsto \frac{x}{2 + x} \qquad g : x \mapsto \frac{2 + x}{x}$$

Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.