

# Rovnice s neznámou pod odmocninou

Martina Šimůnková, 20. září 2015

Učební text k předmětu Matematická analýza pro studenty FP TUL

Máme-li vyřešit rovnici

$$\sqrt{3x - 8} + x = 2, \quad (1)$$

je naším úkolem nalézt množinu

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x - 8} + x = 2\}.$$

První krok při řešení rovnice (1) je osamostatnění odmocniny

$$\sqrt{3x - 8} = -x + 2$$

a následuje umocnění rovnice – touto operací dostaneme rovnici, jejímž řešením je množina

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 8 = (-x + 2)^2\}.$$

Vyřešením kvadratické rovnice, detaily necháme na laskavém čtenáři, dostaneme:  $\mathcal{B} = \{3; 4\}$ .

Jaký je vztah množin  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ? Víme, že pro libovolná reálná čísla  $a$ ,  $b$  platí implikace:  $(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$ , formálně zapsáno

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a = b \Rightarrow (a^2 = b^2)).$$

Dosazením  $a = \sqrt{3x - 8}$ ,  $b = -x + 2$  dostaneme implikaci: jestliže je  $x \in \mathcal{A}$ , pak je  $x \in \mathcal{B}$ . Formálně to zapíšeme takto

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x \in \mathcal{A}) \Rightarrow (x \in \mathcal{B}),$$

nebo takto

$$(\forall x \in \mathcal{A})(x \in \mathcal{B}),$$

nebo pomocí inkluze

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}. \quad (2)$$

Udělejme nyní test pro prvky z  $\mathcal{B}$ , zda jsou prvky  $\mathcal{A}$ :  $3 \notin \mathcal{A}$  protože  $4 \neq 2$  a  $4 \notin \mathcal{A}$  protože  $6 \neq 2$ . Tímto testem jsme vlastně našli množinu

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathcal{B} : \sqrt{3x - 8} + x = 2\} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \quad (3)$$

a zjistili jsme, že  $\mathcal{C} = \emptyset$ .

Jaký je vztah množin  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ ? Z (3) plyne  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ , z (2) plyne opačná inkluze  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ , proto platí  $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ .

Výsledkem našeho výpočtu je

$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x - 8} + x = 2\} = \emptyset.$$