Logika, výroky, množiny

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
18. září 2017

1. Úkoly.

1. Soustřeďte se při konverzaci s ostatními na běžné použití obratů *jestliže . . . , pak* a uveďte příklady, kdy jsou míněny jako implikace a kdy jako ekvivalence.

2. Znegujte výroky a rozhodněte o jejich platnosti. Svůj závěr řádně zdůvodněte. Výroky i jejich negace napište slovy.

   (a)
   $$(\forall a \in \mathbb{R})(a > 3 \Rightarrow a > 4)$$

   (b)
   $$(\forall a \in \mathbb{R})(a > 4 \Rightarrow a > 3)$$

   (c)
   $$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a = b \Rightarrow a^2 = b^2)$$

   (d)
   $$(\forall a, b \in \mathbb{R})(a^2 = b^2 \Rightarrow a = b)$$

   (e)
   $$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x > y)$$

   (f)
   $$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > y)$$

   (g)
   $$(\forall n \in \mathbb{N})(n > 2 \Rightarrow 0.5^n < 0.2)$$

   (h)
   $$(\forall n \in \mathbb{N})(n > 2 \Rightarrow 0.5^n > 0.02)$$

   (i)
   $$(\forall n \in \mathbb{N})(n > 2 \Rightarrow 1.5^n < 10)$$

   (j)
   $$(\forall n \in \mathbb{N})(n > 2 \Rightarrow 1.5^n > 3)$$

3. Ukažte rovnost množin

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) &= (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \\ (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\complement} &= \mathcal{A}^{\complement} \cup \mathcal{B}^{\complement} \end{aligned}$$

   (a) pomocí Vennova diagramu,

   (b) tím, že úvahou ukážete dvě inkluze případně rovnost.

4. Ukažte rovnost množin

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{k \in I} \mathcal{B}_k \right) &= \bigcup_{k \in I} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_k) \\ \left(\bigcap_{k \in I} \mathcal{A}_k \right)^{\complement} &= \bigcup_{k \in I} \left(\mathcal{A}_k^{\complement} \right) \end{aligned}$$

   Postupujte obdobně jako úvahou v předchozím příkladě.

5. Pro množiny

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1} = 1 - 3x\} \\ \mathcal{B} &= \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1 = (1 - 3x)^2\} \end{aligned}$$

   vysvětlete, že

   (a) platí $1 \notin \mathcal{A}$, $1 \in \mathcal{B}$,

   (b) platí $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$,

   (c) neplatí $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

6. Zjistěte, zda platí (jednu inkluzi zdůvodněte stejně jako v předchozím příkladě, druhou vyřešením kvadratické rovnice a ověřením, zda její kořeny splňují rovnici s odmocninou)

$$\{x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{4 - 3x} = 2\} = \{x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 = 4 - 3x\}$$

7. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

   (a)
$$\sqrt{3x - 5} = 1 - x$$

   (b)
$$x - \sqrt{x + 4} = 2$$

   (c)
$$\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 2$$