# Aritmetický, geometrický průměr

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
19. listopadu 2017

**1. Aritmetický průměr.** *Aritmetickým průměrem* $n$-tice reálných čísel $a_1, \ldots a_n$ rozumíme číslo $(a_1 + \cdots + a_n)/n$. Například aritmetickým průměrem čísel 3, 5, $-2$, 1 je číslo 7/4.

Ukážeme si jednu vlastnost: přidáme-li k číslům $a_1, \ldots a_n$ jako $n+1$-ní prvek jejich aritmetický průměr $a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_n)/n$, bude mít nový soubor aritmetický průměr

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}{n+1}$$

V čitateli lze vytknout součet $a_1 + \cdots + a_n$

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)(1 + \frac{1}{n})}{n+1}$$

což po úpravě dá

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

a vidíme tedy, že přidáním průměru k souboru čísel se jejich průměr nezmění.

Na číselné ose leží aritmetický průměr $(a+b)/2$ ve středu úsečky určené body $a$, $b$. Pokud tomu nevěříte, upravte si výraz: poloha $a$ + polovina délky úsečky $ab = a + (b - a)/2$.

**2. Geometrický průměr.** *Geometrickým průměrem* $n$-tice nezáporných čísel $a_1, \ldots a_n$ rozumíme číslo $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Například geometrickým průměrem čísel 3, 5, 2, 1 je číslo $\sqrt[4]{30}$.
Ukážeme, že geometrický průměr má obdobnou vlastnost jako aritmetický průměr. Máme-li $n$-tici nezáporných čísel $a_1, \ldots a_n$ a jejich geometrický průměr $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, pak geometrický průměr této $n+1$-tice je

$$\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

Po úpravách

$$(a_1 \cdots a_n (a_1 \cdots a_n)^{1/n})^{1/(n+1)} = (a_1 \cdots a_n)^{1/(n+1)} (a_1 \cdots a_n)^{1/(n(n+1))} =$$
$$(a_1 \cdots a_n)^{1/(n+1) + 1/(n(n+1))}$$

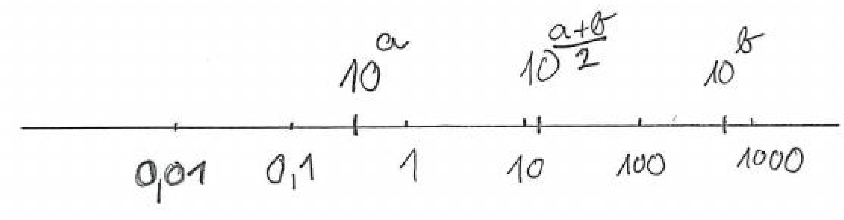
Upravíme exponent

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$$

a dosadíme zpět do průměru

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/(n+1) + 1/(n(n+1))} = (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

Geometrický průměr lze znázornit na ose s logaritmickou škálou.




Ve středu úsečky určené čísly $A = 10^a$, $B = 10^b$ je číslo $10^{(a+b)/2}$, které je geometrickým průměrem čísel $A$, $B$.

**3. Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.** Pro nezáporná čísla $a_1, \dots a_n$ platí následující nerovnost, přitom rovnost platí jen v případě $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \tag{1}$$

Budeme ji někdy používat v ekvivalentním tvaru

$$a_1 \cdots a_n \leq \left( \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^3 \tag{2}$$

a dokážeme její platnost pro $n = 2, 4, 8, 7$ a naznačíme důkaz pro ostatní hodnoty $n$. V dalším textu budeme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem zkráceně nazývat AG nerovnost.

**4. Nerovnost pro dvě čísla.** Jeden ze způsobů důkazu je úprava nerovnosti

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \tag{3}$$

do tvaru

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0$$

a posléze na

$$(a_1 + a_2)/2 \geq \sqrt{a_1 a_2}. \tag{4}$$

Rovnost v (4) platí pouze v případě, že je na levé straně nerovnosti (3) nula, tedy v případě $a_1 = a_2$. Další způsob důkazu je v [1], lemma 1.3.28, vztah (1.10).

AG nerovnost lze znázornit na grafu logaritmu. Nakreslete graf logaritmu a na kladné poloose $x$ zvolte dvě různá čísla $a$, $b$. Doprostřed mezi ně nakreslete $(a + b)/2$, tedy jejich aritmetický průměr. Graf logaritmu nám poslouží k nakreslení geometrického průměru $g$. Platí pro něj $\log g = \log \sqrt{ab} = (\log a + \log b)/2$. Použijte tedy graf logaritmu na vyznačení hodnot $A = \log a$, $B = \log b$ na ose $y$. Uprostřed mezi nimi nakreslete $(A + B)/2 = \log g$ a opět použijte graf logaritmu na vyznačení hodnoty geometrického průměru $g$ na ose $x$. Bod odpovídající geometrickému průměru $g$ by vám měl vyjít vlevo od bodu odpovídajícího aritmetickému průměru $(a + b)/2$. Souvisí to s tím, že na intervalu mezi $a$ a $b$ je graf logaritmu nad úsečkou spojující krajní body $[a, \log a]$, $[b, \log b]$.

**5. AG nerovnost pro čtyři čísla.** Čísla $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ rozdělíme na dvojice, pro které víme, že platí

$$a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \tag{5}$$

$$a_3a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \tag{6}$$

Vynásobením nerovností (5), (6) dostaneme (o násobení nerovností více v dodatku 1)

$$a_1a_2a_3a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$$

a po drobné úpravě

$$a_1a_2a_3a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \tag{7}$$

Nyní napíšeme AG nerovnost pro čísla $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_3+a_4}{2}$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \leq \left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2}\right)^2 \tag{8}$$

a po dvou úpravách dostaneme (ve druhé z nich umocňování nerovnost, o tom více v dodatku 2)

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4 \tag{9}$$

Nerovnosti (7) a (9) spolu s tranzitivitou (vlastnost (11) z 1.3 v [1]) dají požadovanou AG nerovnost

$$a_1a_2a_3a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4 \tag{10}$$

Aby platila v (10) rovnost, musí platit rovnost v (5), (6) a (8). To je možné jen v případě $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

**6. AG nerovnost pro osm čísel.** Podobně jako v minulém odstavci rozdělíme osm čísel na dvě čtveřice a pro každou z nich napíšeme AG nerovnost, tyto nerovnosti vynásobíme a provedeme drobnou úpravu

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \cdot \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}\right)^4 \tag{11}$$

Dále napíšeme AG nerovnost pro dvě čísla – zlomky na pravé straně (11)

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \cdot \frac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4} \leq \left(\frac{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} + \frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}}{2}\right)^2 \tag{12}$$

Výraz v závorce na pravé straně upravíme na $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$, nerovnost (12) umocníme na čtvrtou a spolu s nerovností (11) (a tranzitivností relace nerovnosti) dostaneme

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 \leq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\right)^8 \tag{13}$$

A to je AG nerovnost pro osm čísel.

Aby platila v (13) rovnost, musí platit v (11) a (12), odkud plyne rovnost čísel $a_1, \ldots, a_8$.

**7. AG nerovnost pro sedm čísel.** K sedmi číslům přidáme osmé, které je rovno jejich aritmetickému průměru $a_8 = (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)/7$. Víme, že se tím nezmění aritmetický průměr tedy, že platí

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}{7} \tag{14}$$

Napišme AG nerovnost pro našich osm čísel a použijme (14)

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}{7} \leq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}{7}\right)^8 \tag{15}$$

V případě, že je aritmetický průměr nenulový, můžeme jím nerovnost (15) zkrátit

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \leq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7}{7}\right)^7 \tag{16}$$

a dostáváme AG nerovnost pro sedm čísel.

V případě, že je aritmetický průměr $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)/7$ nulový, jsou nulová všechna čísla (připomeňme, že jsou nezáporná), je tedy nulový i geometrický průměr a AG nerovnost platí.

**8. Úkoly.**

1. Odvoďte AG nerovnost pro 16 čísel.
   Návod: čísla rozdělte na dvě skupiny po osmi a postupujte obdobně jako v případě čtyř či osmi čísel.

2. Odvoďte AG nerovnost pro šest čísel.
   Návod: k šesti číslům přidejte jejich aritmetický průměr, napište AG nerovnost pro těchto sedm čísel a upravujte.

**9. Obecný počet čísel.** Důkaz provádíme matematickou indukcí. Dokážeme nejdříve nerovnost pro dvě čísla (jako výše) a poté provedeme dva indukční kroky: z platnosti pro $n$ čísel odvodíme platnost pro $2n$ čísel (obdobně jako od dvou ke čtyřem či od čtyř k osmi) a pro $n-1$ čísel (obdobně jako od osmi k sedmi).

**10. Dodatek 1 – násobení nerovností.** Budeme postupovat obdobně jako v [1], tvrzení 1.3.1, ve kterém je odvozeno sčítání nerovností. Chceme ukázat, že z nerovností

$$a < b \qquad c < d$$

pro kladné hodnoty $a$, $c$ (a tedy i $b$, $d$ jsou kladná) plyne

$$ac < bd.$$

Vynásobíme-li nerovnost $a < b$ kladným číslem $c$, dostaneme $ac < bc$. Podobně vynásobením nerovnosti $c < d$ kladným číslem $b$ dostaneme nerovnost $cb < db$. Z obdržených nerovností $ac < bc$, $cb < db$ dostaneme požadovanou nerovnost

$$ac < db.$$

Výše potřebujeme násobit nerovnosti nejen s kladnými, ale obecněji s nezápornými čísly. Pro ten případ si stačí rozmyslet, co by se stalo, kdyby některé z čísel $a$, $b$, $c$, $d$ bylo nulové. Čísla $b$, $d$ nulová být nemohou (pak by $a$, případně $c$ muselo být záporné) a v případě nulovosti $a$ nebo $c$ nerovnost $ac < bd$ platí, protože má levou stranu nulovou a pravou kladnou.

**11. Úkol.** Výše jsme odvodili implikaci

$$(\forall a, b, c, d \in (0, +\infty))((a < b \wedge c < d) \Rightarrow (ac < bd)).$$

Odvoďte obdobně implikace

$$\begin{aligned}
&(\forall a, b, c, d \in (0, +\infty))((a \leq b \wedge c \leq d) \Rightarrow (ac \leq bd))\\
&(\forall a, b, c, d \in (0, +\infty))((a \leq b \wedge c < d) \Rightarrow (ac < bd))\\
&(\forall a, b, c, d \in [0, +\infty))((a \leq b \wedge c \leq d) \Rightarrow (ac \leq bd))\\
&(\forall a, b, c, d \in [0, +\infty))((a \leq b \wedge c < d) \Rightarrow (ac \leq bd))
\end{aligned}$$

**12. Dodatek 2 – umocňování nerovností** Máme-li nerovnost s nezápornými stranami

$$a < b, \tag{17}$$

pak vynásobením této nerovnosti s ní samou dostaneme nerovnost

$$a^2 < b^2, \tag{18}$$

vynásobením nerovností (17), (18) dostaneme nerovnost

$$a^3 < b^3, \tag{19}$$

vynásobením nerovností (17), (19) dostaneme nerovnost

$$a^4 < b^4. \tag{20}$$

Pro libovolné přirozené číslo tímto můžeme odvodit nerovnost

$$a^n < b^n. \tag{21}$$

O něco rychleji vede k cíli použití důkazu matematickou indukcí.

# Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.