Limita posloupnosti – definice, věty, obrázky, důkazy

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
15. prosince 2017

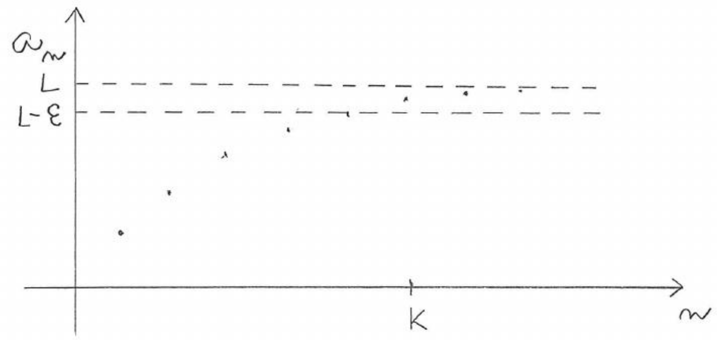
1. Definice okolí bodu. Pro $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ budeme interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ nazývat *ε-okolím bodu x* nebo stručněji *okolím bodu x*. Značit jej budeme $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ nebo stručněji $\mathcal{U}(x)$. Pro malé hodnoty ε obsahuje $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ čísla, která se „málo" liší od čísla x. Míra „malosti" je dána číslem ε. Jinak řečeno, čísla z $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ „splývají" s x při rozlišovací schopnosti dané číslem ε nebo při zaokrouhlení odpovídajícímu číslu ε.

Pro $a \in \mathbb{R}$ nazýváme interval $(a, +\infty)$ *okolím bodu* $+\infty \in \mathbb{R}^*$. Značit jej budeme $\mathcal{U}_a(+\infty)$ nebo stručněji $\mathcal{U}(+\infty)$. Pro velké hodnoty a obsahuje $\mathcal{U}_a(+\infty)$ čísla, která jsou tak velká, že je mezi sebou nedokážeme rozlišit a v podstatě je považujeme za nekonečná (jako příklad uvedeme finanční částky nad určitou hodnotou, nebo vztah náctiletých k věku nad třicet).

Pro $a \in \mathbb{R}$ nazýváme *okolím bodu* $-\infty \in \mathbb{R}^*$ interval $(-\infty, a)$. Značit jej budeme $\mathcal{U}_a(-\infty)$ nebo stručněji $\mathcal{U}(-\infty)$.

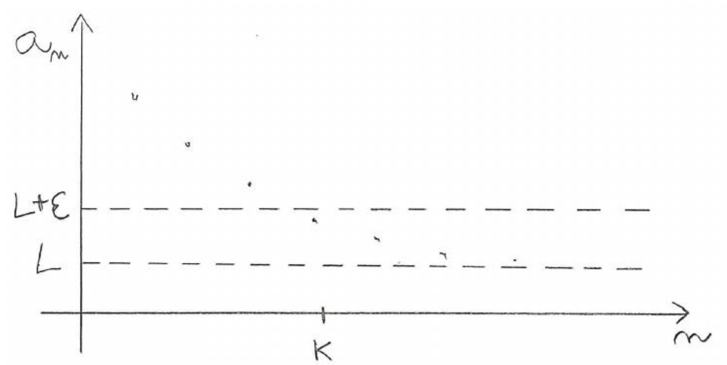
2. Limita omezené monotonní posloupnosti. Na obrázku je graf rostoucí zhora omezené posloupnosti. Hodnota L je supremum množiny hodnot členů poslopupnosti, formálně zapsáno $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Z definice suprema plyne existence $k \in \mathbb{N}$ splňujícího $a_k > L - \varepsilon$. Z monotonie posloupnosti pak plyne $(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n > L - \varepsilon)$.



Na dalším obrázku je graf klesající zdola omezené posloupnosti. Hodnota L je infimum členů posloupnosti, formálně zapsáno $L = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Z definice infima plyne existence $k \in \mathbb{N}$ splňujícího $a_k < L + \varepsilon$. Z monotonie posloupnosti pak plyne $(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n < L + \varepsilon)$.



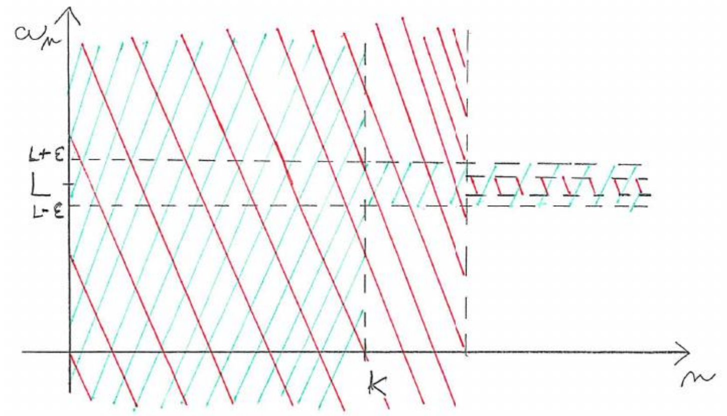
3. Definice konečné (vlastní) limity. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu* $A \in \mathbb{R}$, *pokud*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)). \tag{1}$$

Na obrázku je zeleně vyšrafovaná část roviny, ve které může ležet graf posloupnosti splňující $(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Červeně je vyznačena obdobná situace pro menší hodnotu ε. Okolí $\mathcal{U}(L)$ se zmenší, některé body grafu posloupnosti v něm tedy nemusí ležet, ale má-li posloupnost limitu L, pak pro nějakou větší hodnotu k leží graf poslopupnosti v červeně vyšrafované oblasti.

Definice limity požaduje, aby pro každé $\varepsilon > 0$, tedy libovolně malé okolí bodu L existovalo k takové, že graf posloupnosti leží v části roviny určené k, ε. Obecně se pro zmenšující ε zvětší k.

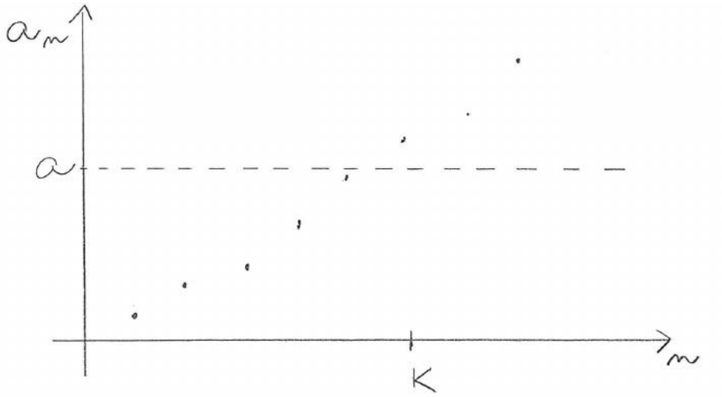
Je užitečné si uvědomit, že zajímavý je případ malých hodnot ε. Máme-li k pro určité ε, pak totéž k „funguje“ i pro větší ε.



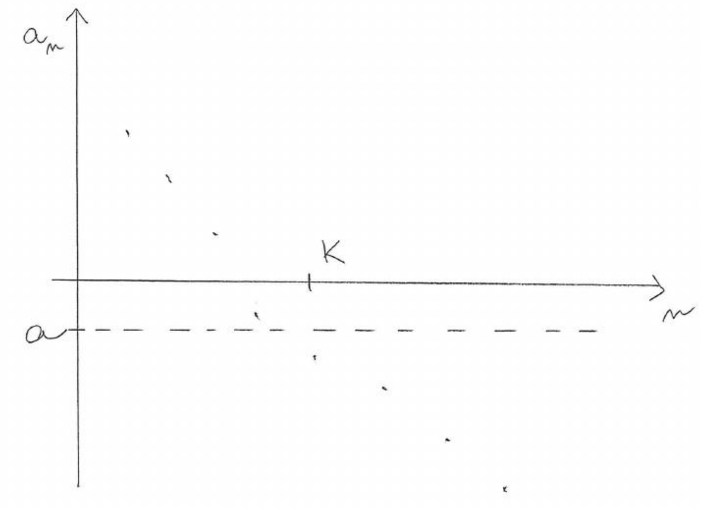
Všimněte si, že pro monotonní omezenou posloupnost platí (1) pro $L = A$ – v definici nahoře požadujeme, aby a_n bylo prvkem jedné z „polovin“ okolí bodu L.

V dalším budeme potřebovat alternativní způsoby zápisu – uvědomte si, že $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ můžeme zapsat buď $|a_n - A| < \varepsilon$ nebo pomocí okolí $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$.

4. Limita monotonní neomezené posloupnosti. Na obrázku je graf rostoucí shora neomezené posloupnosti. Z neomezenosti plyne, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $a_k > a$. Z monotonie pak plyne $(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n > a)$.



Na dalším obrázku je graf klesající zdola neomezené posloupnosti. Z neomezenosti plyne, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí $a_k < a$. Z monotonie pak plyne $(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n < a)$.



5. Definice nekonečné (nevlastní) limity. *Řekneme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má limitu* $+\infty$*, pokud*

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n > a).$$

Vztah $a_n > a$ můžeme zapsat pomocí okolí $a_n \in \mathcal{U}_a(+\infty)$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, pokud

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n < a).$$

Vztah $a_n < a$ můžeme zapsat pomocí okolí $a_n \in \mathcal{U}_a(-\infty)$.

Podobně jako v předchozím odstavci nakreslete obrázek s vyznačením části roviny, ve které může ležet graf poslopupnosti $\{a_n\}$ splňující $(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n > a)$. Jak se bude měnit k se zvyšující respektive snižující hodnotou a?

6. Jednotný způsob zápisu definice limity. Výše uvedené definice limit lze jednotně zformulovat: *Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pokud*

$$(\forall \mathcal{U}(A))(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(A)).$$

Později budeme probírat limitu funkce pro $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$. U posloupnosti je vždy $n \to \infty$. Pomocí okolí $(k, +\infty)$ bodu ∞ lze definici limity posloupnosti přepsat

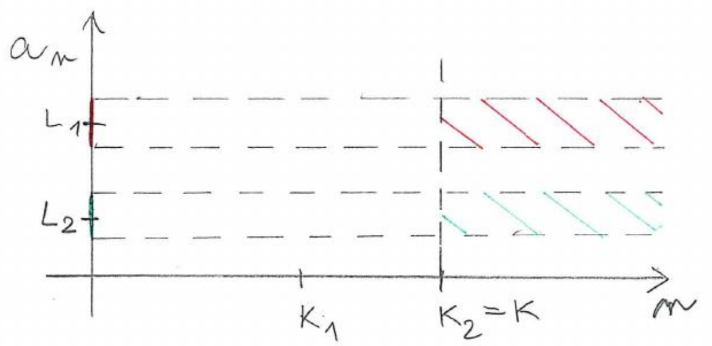
$$(\forall \mathcal{U}(A))(\exists \mathcal{U}(\infty))(\forall n \in \mathbb{N})(n \in \mathcal{U}(\infty) \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(A)).$$

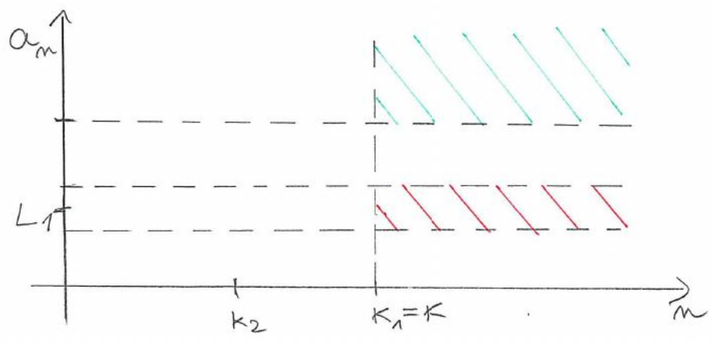
7. Jednoznačnost limity. Větu o jednoznačnosti limity pro konvergentní posloupnosti najdete i s důkazem v [1], lemma 2.1.9 a poznámka 2.1.10. Věta platí i pro nevlastní limity. Důkaz provádíme sporem: předpokládáme, že dvě navzájem různá čísla $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*$ jsou limitou posloupnosti $\{a_n\}$ a z tohoto předpokladu odvodíme něco, co nemůže platit (nazýváme to sporem). Z neplatnosti sporu pak odvodíme neplatnost předpokladu – v našem případě existenci dvou různých limit jedné posloupnosti.

Případ konečných limit ilustrujeme na prvním obrázku. Zvolíme disjunktní okolí $\mathcal{U}(L_1)$, $\mathcal{U}(L_2)$. Pokud je L_1 limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pak k okolí $\mathcal{U}(L_1)$ existuje $k_1 \in \mathbb{N}$ takové, že ... (doplňte). Podobně k okolí $\mathcal{U}(L_2)$ existuje $k_2 \in \mathbb{N}$ .... Označíme-li k maximum z čísel k_1, k_2, pak pro $n > k$ leží a_n v obou okolích, což není možné (jsou disjunktní – nemají žádný společný prvek).

Na druhém obrázku je červeně vyšrafované okolí $\mathcal{U}(L_1)$ pro konečné L_1 a zeleně $\mathcal{U}(+\infty)$. Argumentace je stejná jako výše pro konečná L_1, L_2.

Nakreslete podobné obrázky pro zbylé dva případy: $L_1 \in \mathbb{R}$, $L_2 = -\infty$ a $L_1 = +\infty$, $L_2 = -\infty$.





8. Věta o limitě součtu a hlavní myšlenka jejího důkazu. Formulaci věty naleznete v [1], případ konečných limit ve větě 2.1.22 a poznámce 2.1.23, obecný případ (zahrnující i nevlastní limity) ve větě 2.3.5, přitom definice aritmetických operací pro nekonečna je v 2.3.4.

Projdeme některé podrobnosti důkazů.

1. Případ konečných limit, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$:
   Je-li $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$, $b_n \in \mathcal{U}(B)$, tedy

   $$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \qquad B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon, \tag{2}$$

   dostaneme sečtením nerovnic

   $$A + B - 2\varepsilon < a_n + b_n < A + B + 2\varepsilon, \tag{3}$$

   a tedy $a_n + b_n \in \mathcal{U}_{2\varepsilon}(A + B)$.

   Dvě nerovnosti v (2) platí pro $n > k_1$ a další dvě pro $n > k_2$. Označíme-li $k = \max\{k_1, k_2\}$, pak všechny čtyři nerovnosti v (2) a tedy i v (3) platí pro $n > k$.

   Zbývá vysvětlit, proč nevadí, že je v (3) 2ε a ne ε. Vztahy v (2) platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy i pro $\varepsilon/2$ – touto volbou dostaneme v (3) ε místo 2ε a následně i v $a_n + b_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A + B)$.

2. Případ konečné a nekonečné limity, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = +\infty$:
   Chceme ukázat, že pro a_n blízké A a velké b_n je i $a_n + b_n$ velké.
   Je-li $a_n > A - \varepsilon$, $b_n > b$, pak je
   $$a_n + b_n > A - \varepsilon + b. \tag{4}$$
   V $a_n > A - \varepsilon$ zvolíme $\varepsilon = 1$ a v $b_n > b$ zvolíme $b = c - A + 1$, tak aby bylo v (4) na pravé straně nerovnosti c. Můžeme to udělat, protože definice limity začíná „pro všechna $\varepsilon > 0$“, případně „pro všechna $b \in \mathbb{R}$“.

3. Případ nekonečných limit, $\lim a_n = -\infty$, $\lim b_n = -\infty$:
   Je-li $a_n < a$, $b_n < b$, pak je
   $$a_n + b_n < a + b.$$
   Tady stačí zvolit $a = 1$, $c = b$.

4. V případě $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ věta o limitě součtu neříká nic. Z nerovností $a_n > a$, $b_n < b$ nic neplyne pro $a_n + b_n$.

   Následující příklady ukazují, že $\lim(a_n + b_n)$ může vyjít jakkoliv a nemusí existovat:
   $$\lim(n+(-n)), \lim(2n+(-n)), \lim(n+(2-n)), \lim((n+(-1)^n)+(-n)).$$

9. Omezenost konvergentní posloupnosti. Formulaci i důkaz naleznete v [1], lemma 2.1.21.

10. Úkol. Načrtněte obrázek s vyšrafovanou částí roviny, ve které může ležet graf posloupnosti splňující vztahy z důkazu lemmatu 2.1.21 v [1]. Pro $0 \le n \le k$ máte vyšrafovaný shora i zdola neomezený pás. Z čeho plyne, že hodnoty a_n jsou zde omezené?

11. Věta o limitě součinu.

1. Případ konečných limit, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$:
   Zde by bylo obtížné postupovat jako v případě důkazu věty o limitě součtu, protože při násobení nerovností v (2) bychom museli rozlišovat několik případů podle znamének výrazů. Proto nerovnosti v (2) zapíšeme pomocí absolutní hodnoty: $|a_n - A| < \varepsilon$, $|b_n - B| < \varepsilon$ a budeme postupně upravovat výraz $|a_n b_n - AB|$.
   $$|a_n b_n - AB| = |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \le |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A|.$$

Použili jsme nerovnost $|x + y| \leq |x| + |y|$, v níž jsme dosadili

$$x = a_n(b_n - B), \qquad y = B(a_n - A).$$

Dále víme, že je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, tedy

$$(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq K))$$

a tedy platí

$$|a_n||b_n - B| + |B||a_n - A| < K\varepsilon + |B|\varepsilon = (K + |B|)\varepsilon.$$

Zbývá na začátku místo $|a_n - A| < \varepsilon$ zvolit $|a_n - A| < \varepsilon/(K + |B|)$ a podobně pro $|b_n - B|$, aby nám na konci vyšlo $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$.

12. Věta o limitě podílu. TODO

13. Znaménko limity a znaménko členů posloupnosti. Lemma 2.1.27. TODO

14. Úkoly.

1. Napište definice
$$\lim a_n = 0, \qquad \lim |a_n| = 0$$
a uvědomte si, že to čím se liší můžeme jednoducho úpravou jedno na druhé převést.

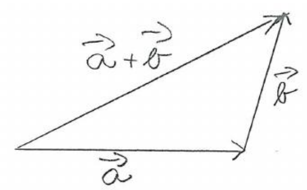
2. Napište definice
$$\lim a_n = a, \qquad \lim |a_n| = |a|$$
a ukažte, že z trojúhelníkové nerovnosti (viz (7) v následujícím odstaveci) plyne
$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

3. Vysvětlete, že jsme v předchozích úkolech dokázali větu 2.1.28 z [1].

4. Promyslete si poznámku 2.1.29 z [1].

5. Dokažte, že i pro nevlastní limity platí implikace
$$\lim a_n = +\infty \Rightarrow \lim |a_n| = +\infty, \quad \lim a_n = -\infty \Rightarrow \lim |a_n| = +\infty.$$

15. Trojúhelníková nerovnost.
Na obrázku tvoří geometrické vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a jejich součet $\vec{a} + \vec{b}$ trojúhelník. Označíme-li velikost vektoru $\vec{v}$ symbolem $\|\vec{v}\|$, můžeme zapsat trojúhelníkovou nerovnost

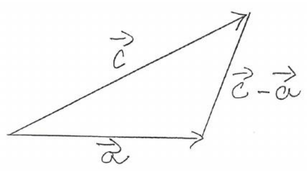


$$\|\vec{a} + \vec{b}\| < \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Nerovnost může přejít v rovnost v případě, že uvedené tři vektory netvoří trojúhelník – leží na jedné přímce. Obecně pro dvojici vektorů platí

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|. \tag{5}$$

Označíme-li $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$, je $\vec{b} = \vec{c}-\vec{a}$ a trojúhelníková nerovnost má tvar



$$\|\vec{c}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{c} - \vec{a}\|$$

a po úpravě

$$\|\vec{c}\| - \|\vec{a}\| \leq \|\vec{c} - \vec{a}\|.$$

Při prohození vektorů $\vec{a}$, $\vec{c}$ se pravá strana nezmění, levá změní znaménko. Proto nerovnost platí i s absolutní hodnotou na levé straně

$$\big|\|\vec{c}\| - \|\vec{a}\|\big| \leq \|\vec{c} - \vec{a}\|. \tag{6}$$

Vektory na přímce odpovídají reálným číslům a (5), (6) přejde na

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \qquad ||c| - |a|| \leq |c - a|. \tag{7}$$

Levou nerovnost jsme dokazovali (úloha 12 v textu Cisla.pdf), pravá se dá z levé odvodit podobně jako pro geometrické vektory (6) z (5).

16. Věta o třech limitách. Jak spočítáme limitu posloupnosti $\{\frac{\sin n}{n}\}$? Vyčíslením jejich několika členů zjistíte, že její členy jsou kladné i záporné, znaménko se střídá zhruba po třech členech, ani v absolutní hodnotě členy neklesají, přesto je vidět jejich tendence k nule.

Máme tedy hypotézu, že $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$. Jak tuto hypotézu dokážeme? Všimneme si, že platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, nerovnosti vynásobíme kladným n a dostaneme

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Protože obě posloupnosti $\{-1/n\}$, $\{1/n\}$ mají limitu nula, platí (pro $n > k$, kteréžto k existuje ke každému kladnému ε)

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{9}$$

Z (8), (9) plyne

$$-\varepsilon < \frac{\sin n}{n} < \varepsilon$$

a odtud plyne $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

Obdobně dokážeme obecné tvrzení pro tři posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ splňující

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq b_n \leq c_n).$$

Tvrzení je zformulováno ve větě 2.3.2 v bodě (2). Společná limita posloupností $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ je zde označena a a pro $n > k$ platí

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon.$$

(V [1] použité a' místo $a-\varepsilon$ a a'' místo $a+\varepsilon$ používá lemma 2.2.9, které jsme vynechali.)

V případě nekonečné limity stačí jedna nerovnost – viz body (3), (4) ve větě 2.3.2 v [1].

17. Úkoly.

1. Ukažte, že posloupnost $\{n + (-1)^n\}$ má limitu $+\infty$.
2. Ukažte, že posloupnost $\{(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\}$ má limitu nula.

Návod: použijte $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

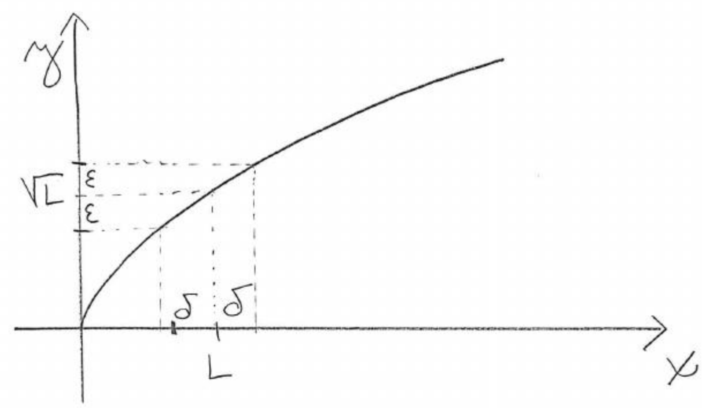
18. Limitní přechod v nerovnosti. Věta 2.3.2, poznámka 2.3.3. TODO

19. Věta o limitě posloupnosti a odmocnině. Dokážeme tvrzení: *Je-li $a_n \to L > 0$, pak $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$.*

K důkazu je potřeba ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n > k \Rightarrow \sqrt{a_n} \in (\sqrt{L} - \varepsilon, \sqrt{L} + \varepsilon)$.

Na obrázku ukazujeme, jak k dostatečně malému $\varepsilon > 0$ zkonstruujeme $\delta > 0$ splňující: $(\forall x)(x \in (L - \delta, L + \delta) \Rightarrow \sqrt{x} \in (\sqrt{L} - \varepsilon, \sqrt{L} + \varepsilon)$.

Protože $a_n \to L$, tak k tomuto δ existuje k takové, že pro $n > k$ platí $a_n \in (L - \delta, L + \delta)$. Odtud, plyne $\sqrt{a_n} \in (\sqrt{L} - \varepsilon, \sqrt{L} + \varepsilon)$.



Obdobné tvrzení platí pro obecnou odmocninu, přitom pro lichý řád odmocniny tvrzení platí bez podmínky $L > 0$:
Je-li m liché a $a_n \to L$, pak $\sqrt[m]{a_n} \to \sqrt[m]{L}$.

Pro m sudé a $L = 0$ platí následující tvrzení:
Je-li m sudé, $a_n \to 0$ a $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq 0)$, pak $\sqrt[m]{a_n} \to 0$ pro $n \to \infty$.

Důkaz bude v obou případech obdobný výše uvedenému důkazu.

Ještě zformulujeme věty pro nevlastní limity. *Je-li $m \in \mathbb{N}$, $a_n \to +\infty$, pak má posloupnost $\{\sqrt[m]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ limitu $+\infty$. Je-li m liché, $a_n \to -\infty$, pak má posloupnost $\{\sqrt[m]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ limitu $-\infty$.*

20. Konvergentní a Cauchyovská posloupnost. Definice Cauchyovské posloupnosti je v [1], 2.4.6. Všimněte si, že se podobá definici konečné (vlastní) limity. Liší se tím, že neobsahuje limitu, místo vzdálenosti n-tého členu posloupnosti a_n od limity posloupnosti a, obsahuje vzdálenost dvou členů posloupnosti $|a_n - a_m|$.

Lemma 2.4.7 říká, že každá konvergentní posloupnost (posloupnost, která má konečnou limitu) je i Cauchyovská.

Věta 2.4.8 říká, že každá Cauchyovská posloupnost má konečnou limitu (je konvergentní). Hlavní myšlenky důkazu věty 2.4.8 jsou: je-li posloupnost Cauchyovská, pak je omezená; je-li poslopunost omezená, pak z ní lze vybrat posloupnost konvergentní, limita této vybrané posloupnosti je limitou i původní posloupnosti – použijeme vztahy z [1] a trojúhelníkovou nerovnost: $|a - a_n| = |a - a_{n_l} + a_{n_l} - a_n| \leq |a - a_{n_l}| + |a_{n_l} - a_n|$.

Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.