Úlohy z posloupností

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
15. listopadu 2017

1. Vyčíslete prvních 10 členů posloupnosti

$$\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

   Návod pro tento a následující dva příklady: studenti kombinace matematika – informatika nechť si napíší program, studenti, kteří programovat neumí, nechť použijí tabulkový procesor (například excel nebo calc). Vyčíslené členy posloupností neopisujte, vytiskněte je.

2. Ukažte, že posloupnost $\{(1-\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a posloupnost $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ klesající.

   Návod: pro první posloupnost použijte nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem na součin $(1-\frac{1}{n})^n \cdot 1$. Pro druhou posloupnost upravte $1/(1-\frac{1}{n+1})$ na $1+\frac{1}{n}$ a použijte monotonii (a kladnost) první posloupnosti, více viz [1] příklad 3.2.8.

3. Prostudujte obrázek č. 1 v [1] na straně 77. Všimněte si podobných lichoběžníků – určete koeficient podobnosti. Co lze z obrázku vyčíst o limitě geometrické posloupnosti s kvocientem z intervalu $(0,1)$?
   Dále dokreslete doleva nahoru trojúhelník podobný s celým velkým trojúhelníkem a použijte ho k určení délky strany AB. Co odtud plyne pro limitu posloupnosti zadané rekutentně následujícími vztahy?

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + q^{n-1}$$

4. Nakreslete analogické obrázky jako v úloze 3 pro kvocient $q = 1$ a $q > 1$.

5. Vyčíslete prvních 10 členů rekurentně zadané posloupnosti. Zdůvodněte, že je tato posloupnost rostoucí. Z čeho plyne, že má tato posloupnost limitu? Ukažte, že je její limita konečná.

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad a_0 = 1.$$

   Návod: k ukázání konečnosti limity použijte větu 2.3.2 z [1], nerovnosti $n! > 2^{n-1}$ a nerovnost $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^k < 2$.

6. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{8}{a_n^2}\right), \quad a_1 = 1.$$

   (a) Ukažte, že prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ jsou větší než 2. Návod: použijte ag nerovnost na trojici čísel a_n, a_n a $8/a_n^2$, více viz [1], příklad 2.4.15.

   (b) Vyjádřete $a_n - a_{n+1}$ pomocí a_n, výraz upravte a ukažte, že nabývá kladných hodnot a odtud odvoďte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající.

   (c) Vyčíslete prvních 10 členů posloupnosti.

7. Ukažte, že pro geometrickou posloupnost s kvocientem q, viz [1], definice 2.1.14, platí výrok ve cvičení 2.1.16: $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = a_1 q^{n-1})$.

8. Nalezněte $k \in \mathbb{Z}$ takové, že

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > k \Rightarrow \frac{1}{n} < 0.003\right).$$

9. Nalezněte $k \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$(\forall n \in \mathbb{R})\,(n > k \Rightarrow 0.7^n < 0.1)\,.$$

10. Vypočtete limity posloupností. Své výpočty podrobně zdůvodňujte – uveďte, kterou základní limitu použijete a dále uvádějte, které věty o limitách posloupností používáte.

$$\left\{\frac{n^2 - n + 2}{2 - 3n^2}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^4}{n^9}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^4}{n^8}\right\}.$$

    Návod: [2], příklad 3.1.

11. Vypočtete limity posloupností

$$\left\{\frac{(2n^3+1)^2 - (1-n)^6}{n^6 - 3n^4 + 2n + 12}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^4}{n^7}\right\},$$

$$\left\{\frac{n^4+2n}{n^3-1} + \frac{2n^2+3}{1-2n}\right\}, \quad \left\{\frac{n^4+2n}{n^3-1} + \frac{3n^2+3}{2n+1}\right\}.$$

12. Určete pro jaké $k \in \mathbb{Z}$ jsou následující posloupnosti konvergentní

$$\left\{\frac{n^k}{(n^3-6)^4}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^3 - (n^3+1)^2}{n^k}\right\}, \quad \left\{\frac{(n-2)^5 - n^5 + 10n^4}{n^k}\right\}.$$

13. Až budeme probírat funkce, zavedeme pojem *spojitosti* funkce *v bodě* a *spojitosti* funkce *na intervalu*. Ukážeme, že odmocniny jsou spojité ve všech bodech svých definičních oborů s výjimkou sudých odmocnin v bodě nula (kde vadí, že funkce není definována na žádném okolí bodu nula). Dále ukážeme, že pro konvergentní posloupnost $a_n \to a$ a pro funkci f spojitou v bodě a je posloupnost $\{f(a_n)\}$ konvergentní s limitou $f(a)$.

    (a) Použijte výše uvedenou vlastnost odmocnin k výpočtu limity posloupnosti
    $$\left\{\sqrt[3]{\frac{(2n^2+1)^5(3-n)^7}{8n^{17}}}\right\}$$

    (b) Nakreslete graf třetí odmocniny a vyznačte na ose x bod a, který je roven limitě posloupnosti $\{(2n^2+1)^5(3-n)^7/(8n^{17})\}$ a na ose y jeho funkční hodnotu $A = \sqrt[3]{a}$. Dále na ose y vyznačte okolí $\mathcal{U}(A)$ bodu A a pak na ose x vyznačte okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a splňující $f(\mathcal{U}(a)) \subseteq \mathcal{U}(A)$. Vysvětlete souvislost tohoto grafu s výpočtem limity v 13a.

    (c) Vypočtěte limity posloupností
    $$\left\{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{3n}\right\}, \quad \left\{n+\sqrt{n^2+n}\right\}, \quad \left\{n-\sqrt{n^2+n}\right\}.$$

    (d) Další příklady najdete v [2], strana 27, příklad 3.1, 3.2 strana 29, cvičení 3.01 – 3.04, 3.06, 3.07, 3.09 – 3.13, strana 30 cvičení 3.16, 3.17 s výsledky na straně 35.

Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy. `www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.

[2] Ilja Černý. Inteligentní kalkulus 1. `https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/IK1.pdf`.