Derivace funkce jedné proměnné

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
4. ledna 2018

1. Vzorce pro výpočty (odvodíme na přednášce).

1. Derivace mocniny $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
2. Derivace konstantní funkce $c' = 0$.
3. Derivace odmocniny $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pro liché n i $x < 0$.
4. Derivace součtu je součet derivací $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
5. Derivace násobku je násobek derivací $(cf(x))' = cf'(x)$.
6. Předchozí vlastnosti znamenají, že derivování je na vektorovém prostoru funkcí lineárním zobrazením.
7. Derivace součinu (není součin derivací) $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$.
8. Derivace podílu $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/(g(x))^2$.
9. Derivace složené funkce $(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$.
10. Z 1, 3 a 9 lze odvodit $(\sqrt[n]{x^m})' = (m/n)x^{m/n-1}$.
    Z 8 pak $(1/\sqrt[n]{x^m})' = (-m/n)x^{-m/n-1}$.
11. Vztahy 1, 3 a 10 můžeme zapsat $(x^q)' = qx^{q-1}$ pro $q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, derivujeme podle proměnné x.

2. Rovnice tečny a derivace.
Tečnou ke grafu funkce f v bodě x_0 nazýváme přímku o rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

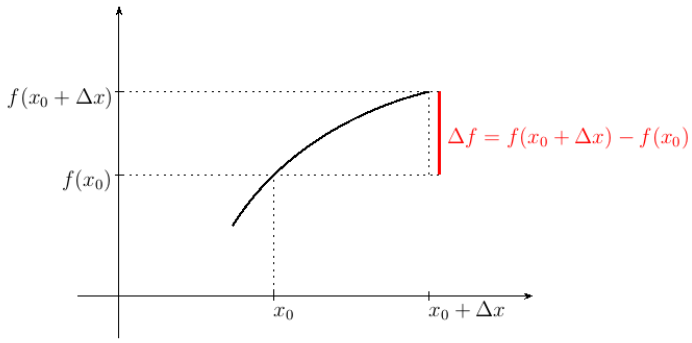
Příklady – ke každému načrtněte graf s tečnou a zamyslete se, zda odpovídá vaší představě tečny.

1. $f : x \mapsto x^2$, $x_0 = 1$, tečna má rovnici $y = 1 + 2(x - 1)$ nebo po úpravě $y = 2x - 1$.

2. $f : x \mapsto x^3$, $x_0 = 0$, tečna má rovnici $y = 0$.

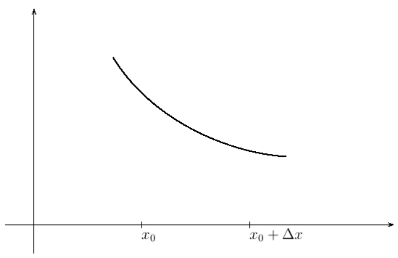
3. $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ spojitě rozšířená do nuly má v bodě $x_0 = 0$ tečnu o rovnici $y = 0$.

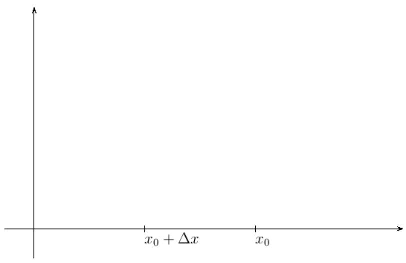
3. Přírůstek funkce.



Δx nazýváme přírůstkem proměnné x, Δf přírůstkem funkce (přesněji bychom měli říkat spíš přírůstek funkční hodnoty, ale moc se to nepoužívá)

Jak přírůstek funkce Δf, tak přírůstek Δx může být záporný, jak ilustrují další obrázky.

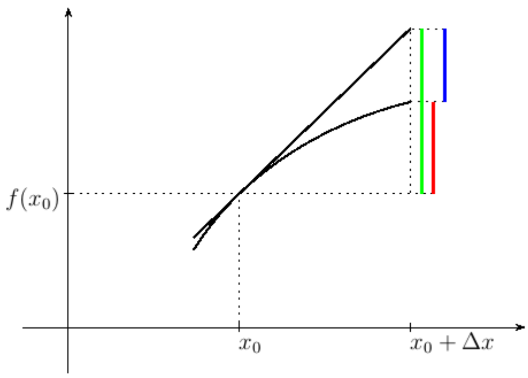




4. Derivace jako nejlepší lineární aproximace. Derivace funkce f jedné proměnné v bodě x_0 je číslo, které značíme $f'(x_0)$. Je možný i jiný přístup, který se zpravidla používá v případě funkce více proměnných. Derivací tam nazýváme lineární funkci, která přírůstku Δx přiřadí číslo $f'(x_0)\Delta x$. Výraz $f'(x_0)\Delta x$ budeme nazývat *lineární částí přírůstku funkce* a budeme jej značit $\mathrm{d}f$. Příklad 5.2.10 a poznámka 5.2.11 v [1] mimo jiné říká

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} = 0,$$

což interpretujeme: pro malý přírůstek proměnné Δx je chyba, které se dopustíme záměnou přírůstku funkce Δf za linearizovaný přírůstek $\mathrm{d}f$, zanedbatelná vzhledem k Δx. Graficky tento fakt znázorníme na následujícím obrázku.



Na obrázku je červeně vyznačen *přírůstek funkce*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

zeleně jeho *lineární část*

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\Delta x,$$

modře jejich rozdíl $\mathrm{d}f - \Delta f$.

Místo Δx mnohdy píšeme $\mathrm{d}x$ (jsou to přírůstky identity $\mathrm{id} : x \mapsto x$).

Poznámka ke geometrickému významu derivace: číslo $f'(x_0)$ je rovno podílu $\frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}$ a má význam hodnoty linearizovaného přírůstku na jednotkový přírůstek proměnné x: pro $\Delta x = 1$ je $f'(x_0) = \mathrm{d}f$.

Číslo $f'(x_0)$ je směrnicí přímky o rovnici $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a v případě stejných měřítek na osách x, y je tato směrnice rovna tangensu úhlu, který tečna svírá s kladnou poloosou x.

Reference

[1] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.