Osnova předmětu KAP/AN1E

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
15. prosince 2017

Tvrzení (tedy věty a lemmata) i s důkazem, pokud není uvedeno jinak.

1. Čísla. Číselné množiny. Reálná čísla: desetinný rozvoj, číselná osa, počítání s nepřesnými čísly, šíření chyb ve výpočtech. Reálná čísla jako matematická struktura: operace, relace, axiomy, zejména axiom supréma. Absolutní hodnota.
Zdroje: [11]

2. Zobrazení. Vzor a obraz. Zobrazení f je zadané svým definičním oborem $D(f)$ a předpisem $f : x \mapsto y$ (tj. pravidlem, které vzoru x přiřadí obraz y).
Graf zobrazení f je množina dvojic $[x, f(x)]$, kde x je prvkem definičního oboru; formálně zapsáno $\{[x, y] : x \in D(f), y = f(x)\}$.
Předpis, pravidlo jsou poněkud vágní pojmy, proto je více korektní říct, jaká množina je grafem zobrazení a od grafu pak odvodit pojem zobrazení.
Prosté zobrazení, inverzní zobrazení, obor hodnot a řešení rovnice $y = f(x)$ s neznánou x a parametrem y. Grafické řešení takové rovnice a grafické znázornění početního řešení (aneb cesta od grafu funkce ke kořenům rovnice a od kořenů rovnice ke grafu funkce).
Skládání zobrazení, složené zobrazení, substituce při řešení rovnic.
Zobrazení (z) množiny A do/na množinu B.
Zúžené a rozšířené zobrazení. Příklady:

$$f : x \mapsto \log |x| \qquad g : x \mapsto \log x$$

$$f : x \mapsto \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \qquad g : x \mapsto x^2 + 1$$

Graf zúženého zobrazení je podmnožinou grafu zobrazení. Graf rozšířeného zobrazení je nadmnožinou grafu zobrazení.
Obraz a vzor množiny (zpravidla intervalu).
Zdroje: [7]

3. Jazyk matematiky, výroky, množiny.
Implikace, ekvivalence, podmnožina, rovnost množin, ekvivalentní a neekvivalentní úpravy.
Zdroje: [4], [6], [9]

4. Funkce je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
Elementární funkce, funkce po částech elementární a jejich grafy.
Funkce signum, [2], označení 2.1.26, celá část (někdy říkáme dolní, horní celá část), lomená část, [2], v poznámce 1.4.30 odstavec začínající „Jeli dáno $s \in \mathbb{R}$“.
Dirichletova funkce, definice 4.1.5, Riemannova funkce, příklad 4.2.9.
Monotonie funkce, definice 4.1.7, poznámka 4.1.8. Monotonie složené funkce, použití monotonie k určení obrazu a vzoru intervalu.
Monotonie funkcí a řešení nerovnic.
Problém oboru hodnot elementárních funkcí, vlastnost suprema reálných čísel, spojitost a vlastnost nabývání mezihodnot (Darbouxova vlastnost) ([2], věta 4.3.37).

Darbouxova vlastnost a řešení nerovnic.
Zdroje: [2], [1], [5], [8]

5. Ag nerovnost. Důkaz pro dvě, čtyři, osm, sedm čísel. Znázornění na grafu logaritmu.

6. Binomická věta. Faktoriály, kombinační čísla, Pascalův trojúhelník.

7. Posloupnosti.
Posloupnost jako zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, definice 2.1.1, poznámka 2.1.2.
Monotonní posloupnost, poznámka 2.1.11, definice 2.1.12. Příklady monotonních posloupností a výpočet jejich několika prvků v tabulkovém procesoru: $\{n\}$, $\{1/n\}$, $\{(1+1/n)^n\}$, $\{\sum_{k=1}^{n} 1/k!\}$, $\{\sqrt[n]{n}\}$, rekurentně zadaná posloupnost $a_n = (a_{n-1}/p + a(p-1)/(pa_{n-1}^{p-1}))$, $a_1 = \dots$, $p \in \mathbb{N}$, $a > 0$, příklad 2.4.15, k rekurentně zadaným posloupnostem poznámka 2.1.15.
Obtížný pojem limity posloupnosti vysvětlíme na geometrické posloupnosti. Geometrická posloupnost s nezáporným kvocientem je monotonní a limita monotonní posloupnosti je supremum jejích prvků pro neklesající posloupnost a infimum jejích prvků pro nerostoucí posloupnost.
Geometrická posloupnost: definice 2.1.14, poznámka 2.1.15, cvičení 2.1.16.
Pro nezápornou hodnotu kvocientu je geometrická posloupnost monotonní. Její hodnoty se blíží nule, jedné nebo nekonečnu podle hodnoty kvocientu. Obrázek 1 na straně 77 v [2] ilustruje geometrickou posloupnost s kvocientem $q \in (0,1)$ a součet geometrické řady (pojem *řada* budeme probírat v letním semestru, není to totéž, co posloupnost). Nakreslíme si podobný obrázek pro $q = 1$ a $q > 1$.
Geometrická posloupnost se záporným kvocientem: pro kvocient $q \in (-1,0)$ se hodnoty nemonotonně blíží k nule. Pro $q = -1$ oscilují mezi 1 a -1. Pro $q < -1$ se v absolutní hodnotě zvětšují nade všechny meze, ale skáčou mezi kladnými a zápornými hodnotami. Zavedeme pojem *limity posloupnosti* pomocí pojmu *okolí bodu* a podle této definice geometrická posloupnost s kvocientem $q \le -1$ nemá limitu, posloupnost s kvocientem $q \in (-1,0)$ limitu má a monotonní posloupnosti mají limitu stejnou jako jsme zavedli dříve.
Okolí bodu: *vlastního*, definice 2.1.4, poznámka 2.1.5 a *nevlastního*, označení 4.3.1.
Vlastní limita posloupnosti, *konvergentní posloupnost*, definice 2.1.6, 2.1.7, poznámky 2.1.8.
Nevlastní limita posloupnosti, definice 2.2.1.
Značení limity posloupnosti, závěr definice 2.1.6.
Limita posloupnosti pomocí okolí bodu: $\lim a_n = L$, pokud
$(\forall \mathcal{U}(L))(\exists \mathcal{U}(+\infty))(n \in \mathcal{U}(+\infty) \Rightarrow a_n \in \mathcal{U}(L))$.
Monotonní posloupnost a definice limity posloupnosti, věta 2.1.19, poznámka 2.1.20, věta 2.2.12, z důkazu jen hlavní myšlenky.
Jednoznačnost limity, lemma 2.1.9, poznámka 2.1.10.
Limita konstantní posloupnosti, limita posloupnosti $\{1/n\}$, poznámky 2.1.13.
Limita geometrické posloupnosti (v závislosti na hodnotě kvocientu). K ukázání limit použijeme logaritmy, v příkladě 2.2.14 bez použití logaritmů.
Vybraná posloupnost, definice 2.4.3, tvrzení 2.4.13 o její limitě. Neexistence limity posloupnosti $\{(-1)^n\}$, důsledek 2.4.14.
Omezenost konvergentní posloupnosti, lemma 2.1.21 (opačná implikace neplatí).
Věty o limitách posloupností a aritmetických operacích. Případ vlastních limit, věta 2.1.22, poznámka 2.1.23, důsledek 2.1.25, věta 2.1.30, poznámka 2.1.31. Obecný případ (tedy vlastní i nevlastní limity), definice 2.3.4, věta 2.3.5. Z důkazů jen hlavní myšlenky.

Lemma 2.1.27 o znaménku členů konvergentní posloupnosti, věta 2.1.28 o konvergentní posloupnosti a absolutní hodnotě.
Věta 2.3.2, poznámka 2.3.3 o limitách posloupností a nerovnostech. Lemma 2.4.10 o součinu posloupnosti s nulovou limitou a omezené posloupnosti.
Vztah konvergence a omezenosti: Konvergentní posloupnost je omezená. Opačná implikace neplatí, omezená posloupnost nemusí být konvergentní, například $\{(-1)^n\}$. Z omezené posloupnosti je možné vybrat konvergentní posloupnost, věta 2.4.4, z důkazu jen hlavní myšlenky.
Existence vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti, věta 2.4.4, z důkazu jen hlavní myšlenka.
Cauchyovská posloupnost, definice 2.4.6. Konvergentní a Cauchyovské posloupnosti, lemma 2.4.7, věta 2.4.8, z důkazu věty jen hlavní myšlenka.
Zdroje: [2], [3], [10].

8. Funkce. Lineární funkce, její graf, geometrický význam koeficientů.
Polynomy, kořeny polynomů, základní věta algebry, rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.
Racionální funkce, rozklad na součet (opak převedení na společného jmenovatele).
Spojitost funkce v bodě, definice 4.2.1, poznámka 4.2.2, poznámky 4.2.3, spojitost funkce na otevřeném intervalu, definice 4.2.19.
Posloupnosti a spojitost, lemma 4.2.6, důsledek 4.2.7, věta 4.2.11 (u této věty jen hlavní myšlenka důkazu).
Prstencové okolí, označení 4.3.1, limity (vlastní, nevlastní, ve vlastním bodě v nevlastním bodě) funkce, definice 4.3.2.
Jednoznačnost limity, lemma 4.3.3.
Souvislost spojitosti funkce a limity funkce, tvrzení 4.3.4, poznámky 4.3.5, odstranitelná nespojitost (například funkce $x \mapsto (x^2 - 1)/(x - 1)$ v bodě $x = 1$).
Levé a pravé okolí vlastního bodu. Jednostranné limity, definice 4.3.20, definice 4.3.21.
Existence jednostranné limity monotonní funkce, věta 4.3.40.
Jednostranné a oboustranné limity složené funkce, věta 4.4.1.
Jednostranná spojitost, definice 4.3.23.
Spojitost funkce na uzavřeném intervalu, definice 4.3.26.
Věty o spojitých funkcích na uzavřeném intervalu (a vlastnost suprema reálných čísel): Věta 4.3.31 o existenci extrémů funkce spojité na uzavřeném intervalu. Příklad funkce nemající extrém na uzavřeném intervalu (nemůže být spojitá). Příklad spojité funkce nemající extrém na intervalu (nemůže být uzavřený). Věta 4.3.32 o existenci kořene. Věty 4.3.34 a 4.3.37 o obrazu intervalu ve spojité funkci. Věta 4.3.36 o Darbouxově vlastnosti spojité funkce. Příklad 4.3.39 nespojité funkce mající Darbouxovu vlastnost.
Druhy nespojitostí: odstranitelná nespojitost, nespojitost typu skoku.
Derivace. Geometrický význam (sečna, tečna, jejich směrnice), fyzikální význam (rychlost pohybu, rychlost změny).
Derivace, tečna ke grafu funkce, lineární aproximace funkce.
Derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu. Derivace složené funkce.
Derivace inverzní funkce.
Derivace a lokální extrémy.
Rolleova a Lagrangeova věta o střední hodnotě.
Příklad nespojité derivace (derivace spojitého rozšíření funkce $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$).
Derivace a monotonie.
Zdroje: [2]

9. Exponenciální a logaritmické funkce.

10. Goniometrické funkce a cyklometrické funkce.

11. Hyperbolické a hyperbolometrické funkce.

Reference

[1] https://www.wolframalpha.com.

[2] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.

[3] M. Š. Limita posloupnosti – definice, věty, obrázky, důkazy.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[4] M. Š. Logika, výroky, množiny.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[5] M. Š. Nerovnice, grafy, monotonie, spojitost.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[6] M. Š. Rovnice s neznámou pod odmocninou.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[7] M. Š. Zobrazení.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[8] M. Š. Úlohy z funkcí – grafy, monotonie, nerovnice.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[9] M. Š. Úlohy z logiky, výroků, množin.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[10] M. Š. Úlohy z posloupností.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.

[11] M. Š. Čísla.
na https://kap.fp.tul.cz/~simunkova.