Písemná část zkoušky z předmětu AN1E
3. ledna 2019

Jméno a příjmení:

Skutečná písemná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písemnou část napsat na alespoň 51%.

1. Napište definici pojmu inkluze (podmnožiny) a vysvětlete, jak jej lze použít k řešení rovnice. Rovnici vyřešte.
$$\sqrt{1+2x^2} = 2x+1$$

2. Napište definici funkce rostoucí na intervalu a vysvětlete, jak tento pojem využijete k řešení nerovnice. Nerovnici vyřešte.
$$\sqrt{1+2x^2} \geq 2x+1$$

3. Vysvětlete, jak vyřešíte nerovnici použitím vlastnosti nabývání mezihodnot a poté nerovnici vyřešte.
$$\sqrt{1+2x^2} \geq 2x+1$$

4. Napište nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (pro jaká čísla platí?) a použijte ji k důkazu monotonie posloupnosti $\{(1-\frac{3}{n})^n\}_{n=3}^{\infty}$.

4b. Ukažte, že následující posloupnost je klesající
$$\{(1+\tfrac{1}{n})^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$$

5. Napište nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (pro jaká čísla platí?) a použijte ji k důkazu monotonie posloupnosti $\{a_n\}$ zadané rekurentně. Zdůvodněte, že má posloupnost vlastní (tj. konečnou) limitu a tuto limitu vypočtěte.
$$a_1 = 7 \qquad a_n = \frac{1}{5}\left(4a_{n-1} + \frac{7}{a_{n-1}^4}\right).$$

6. Napište definici vlastní limity posloupnosti a definici použijte k důkazu, že limita posloupnosti $\{0.8^n\}$ je rovna nule.

7. Napište definici nevlastní limity posloupnosti a definici použijte k důkazu, že limita posloupnosti $\{1.8^n\}$ je rovna nekonečnu.

8. Vypočtěte limity posloupností

$$\left\{n^2+\sqrt{n^4-3n^2+4}\right\} \qquad \left\{n^2-\sqrt{n^4-3n^2+4}\right\} \qquad \left\{\sqrt{n^2-\sqrt{n^4-3n^2+4}}\right\}$$

8b. Vypočtěte limity posloupností

$$\left\{\frac{n^2-\sqrt{n^4+n^3-3n^2+4}}{3n+5}\right\} \qquad \left\{\frac{2^{n+2}+2^{2n+1}}{3^{n+3}+4^n}\right\}$$

9. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{6x^2+5x+1}{2x+1}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na množinu $\mathbb{R}$.

9b. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{x-2}{2x^2-3x-2}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na množinu $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

9c. Napište definici rozšířené funkce, načrtněte graf funkce $f : x \mapsto \frac{x-1}{2-\sqrt{3x+1}}$ a ukažte, že lze f spojitě rozšířit na interval $[-1/3, +\infty)$.

10. Ukažte, že má funkce $f : x \mapsto x^2$ v bodě $-\infty$ limitu rovnu $+\infty$ – napište definici a ukažte, že jí funkce f vyhovuje.

10b. Napište definici spojitosti funkce f v bodě 0 zprava a ukažte, že funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ této definici vyhovuje.

10c. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá v bodě $x = -1$. Napište definici spojitosti funkce f v bodě a ukažte, že ji funkce vyhovuje, případně nevyhovuje.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1-2x-x^2 & x < -1, \\ 2+x & x \geq -1. \end{cases}$$

11. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit do krajních bodů definičního oboru.

$$f : x \mapsto \frac{(x-3)(x+\sqrt{x+2})}{(x^2+3x+2)(3-\sqrt{x+6})}$$

12. Vypočtěte limity funkce f v bodech $\pm\infty$.

$$f : x \mapsto x+\sqrt{1+x+x^2}$$

13. Vypočtěte jednostranné limity funkce f v bodech 1 a -2. Má funkce f v daných bodech oboustrannou limitu?

$$f : x \mapsto \frac{x^4 - 4}{x^3 - 3x + 2}$$

14. Napište definici derivace funkce v bodě a použijte ji k výpočtu derivace funkce $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ v bodě 2.

15. Napište definici derivace funkce a použijte ji k výpočtu derivace funkce $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

16. Pro interval $I = (-1, 2]$ a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 2}$$

Na základě předchozí úlohy rozhodněte, zda nabývá funkce f na intervalu I maximální a minimální hodnoty.

16b. Pro interval $I = (-1, 2)$ a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x$$

Na základě předchozí úlohy rozhodněte, zda nabývá funkce f na intervalu I maximální a minimální hodnoty.

17. Nalezněte maximální (vzhledem k inkluzi) intervaly, na nichž je funkce f klesající. Formulujte větu o souvislosti hodnoty derivace a monotonie funkce, kterou při řešení příkladu používáte.

$$f : x \mapsto \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$

18. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f, ukažte, že je f na svém definičním oboru rostoucí a vypočtěte $f^{-1}(y)$ pro y z oboru hodnot funkce f.

$$f : x \mapsto x + \sqrt{1 + x + x^2}$$

18b. Určete definiční obor funkce f, zjistěte, zda je na svém definičním oboru monotonní a případně určete druh monotonie.

$$f : x \mapsto x - \sqrt{2 - x + x^2}$$

18c. Vypočtěte limity funkce f v $\pm\infty$

$$f : x \mapsto x - \sqrt{2 - x + x^2}$$

18d. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem $y \in \mathbb{R}$

$$y = x - \sqrt{2 - x + x^2}$$

(a) Pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice (alespoň jedno) řešení?

(b) Pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice více jak jedno řešení?

18e. Určete definiční obor funkce f, zjistěte, zda je na svém definičním oboru monotonní a případně určete druh monotonie.

$$f : x \mapsto x + \sqrt{3 - 4x + x^2}$$

18f. Vypočtěte limity funkce f v $\pm\infty$

$$f : x \mapsto x + \sqrt{3 - 4x + x^2}$$

18g. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem $y \in \mathbb{R}$

$$y = x + \sqrt{3 - 4x + x^2}$$

(a) Pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice (alespoň jedno) řešení?

(b) Pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice více jak jedno řešení?

19. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jejím bodě $[2, f(2)]$ a napište její rovnici.

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+7}}{(x-1)^2}$$

19b. Načrtněte tečnu ke grafu funkce f v jejím bodě $[3, f(3)]$ a napište její rovnici. Dále zjistěte, na jaké straně tečny leží graf funkce v okolí bodu $x = 3$.

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$$

20. Hodnota číselného výrazu $\sqrt{9.2}$ je přibližně rovna třem. Zpřesněte hodnotu bez použití kalkulačky výpočtem derivace vhodné funkce.

20b. Hodnota číselného výrazu $\frac{1}{\sqrt[3]{7.9^2}}$ je přibližně rovna 0.25. Zpřesněte hodnotu bez použití kalkulačky výpočtem derivace vhodné funkce.

21. Napište Taylorův polynom funkce f se středem v bodě mínus tři stupně dva. Zjistěte, zda se Taylorův polynom rovná funkci f dvěma způsoby: úpravou a pomocí věty o zbytku Taylorova polynomu.

$$f : x \mapsto x^3 + 4$$

22. Napište Taylorův polynom funkce f se středem v bodě nula pátého stupně.

$$f : x \mapsto \sqrt[4]{(1+x)^7}$$

23. Řešte rovnici s neznámou x a parametrem y a výsledek graficky znázorněte.

$$y = 2x - \sqrt{1 + 4x^2}$$

Zodpovězte otázky a vysvětlete, jak se projeví odpovědi na grafu.

(a) Pro jaká $y \in \mathbb{R}$ má rovnice řešení?

(b) Pro jaká $y \in \mathbb{R}$ má rovnice více jak jedno řešení?

23b. Řešte rovnici s neznámou y a parametrem x a výsledek graficky znázorněte.

$$x = 2y - \sqrt{1 + 4y^2}$$

Zodpovězte otázky a vysvětlete, jak se projeví odpovědi na grafu.

(a) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ má rovnice řešení?

(b) Pro jaká $x \in \mathbb{R}$ má rovnice více jak jedno řešení?

24. Rozložte výraz na součet polynomu a parciálních zlomků

$$\frac{x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 4x + 21}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

24b. Rozložte výraz na součet polynomu a parciálních zlomků

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 5x + 5}{(x^2 - 3x + 4)^2}$$

24c. Rozložte výraz na součet polynomu a parciálních zlomků

$$\frac{2x^2 + (12 - \sqrt{12})x + (12 + \sqrt{12})}{x^3 + 5x^2 - 6}$$