Druhá série úloh ze středoškolské matematiky

1. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot zjistěte, zda jsou ekvivalentní výroky (symbol $\neg$ označuje negaci, tedy $\neg a$ značí negaci výroku a).

   (a) Výrok: $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)$ s výrokem $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$.

   (b) Výrok: $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ s výrokem $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.

   (c) Výrok $\neg(a \Rightarrow b)$ s výrokem $a \wedge \neg b$.

   (d) Výrok $(a \vee b) \wedge c$ s výrokem $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

2. Ukažte, že následující výroky jsou pravdivé pro jakékoliv pravdivostní ohodnocení výroků a, b, c

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow a), \qquad (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$$

3. Zapište pomocí jednoho výroku (a, $\neg a$, 1 nebo 0) následující výroky: $a \vee 1$, $a \wedge 1$, $a \vee 0$, $a \wedge 0$, $a \vee a$, $a \vee \neg a$, $a \wedge a$, $a \wedge \neg a$. Symboly 1, popřípadě 0, označují pravdivý, popřípadě nepravdivý, výrok.

4. Znegujte výroky a rozhodněte o jejich platnosti. Svůj závěr řádně zdůvodněte. Výroky i jejich negace napište slovy.

   (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x - 4 > 0)$

   (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x - 4 > 0)$

   (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin x > -1)$

   (d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\sin x > -1)$

   (e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin x \geq -1)$

   (f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\sin x \geq -1)$

5. Na reálné ose vyznačte množiny

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 \geq 0\}, \\
B &= \{x \in \mathbb{R} : x - (2x + 5) \leq -4\}, \\
C &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 < 0\}, \\
D &= \{x \in \mathbb{R} : x + (2x + 5) \leq -4\}, \\
E &= \{x \in \mathbb{R} : (2x + 5 \geq 0) \wedge (x - (2x + 5) \leq -4)\}, \\
F &= \{x \in \mathbb{R} : (x + (2x + 5) \leq -4) \wedge (2x + 5 < 0)\}, \\
& \quad A \cap B, \quad C \cap D, \quad E \cup F
\end{aligned}$$

6. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující rovnici

(a)
$$x - |2x + 5| = -4$$

(b)
$$|x + 2| - |2x - 3| = 1$$

(c)
$$|3x - 1| + |x - 3| = 8$$

7. Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující nerovnici

(a)
$$x - |2x + 5| \leq -4$$

(b)
$$|x + 2| - |2x - 3| \geq 1$$

(c)
$$|3x - 1| + |x - 3| > 8$$