Čísla

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
18. září 2017

1. Stručný průvodce po číselných oborech pro zopakování a uvědomění si souvislostí.

a. *Přirozená čísla* – označují množství. Jsou abstrakcí.

Je nula přirozené číslo?

b. *Celá čísla*: k přirozeným číslům přidáme *nulu* (pokud jsme ji za přirozené číslo nepovažovali). Nula je *neutrální prvek* pro operaci sčítání: $n + 0 = n$. Dále přidáme *opačná čísla* přirozených čísel. Pro opačné číslo o k číslu n platí $n+o = 0$, opačné číslo o značíme $-n$ a slouží k nové operaci: odčítání (odečtení n je totožné s přičtením $-n$) a ta slouží k řešení rovnice: $a + x = b$, $x = b + (-a) = b - a$. (Podobně je to s geometrickými vektory: chcete-li je odečíst, pak buď přičítáte opačný vektor nebo hledáte řešení rovnice.)

Proč je $(-1)\times(-1) = 1$? Obecněji: proč je součin dvou záporných čísel kladné číslo?

c. *Racionální čísla* – zlomek s celočíselným čitatelem i jmenovatelem a nenulovým jmenovatelem. Slouží k dělení na obecný počet dílů (třeba kořisti nebo koláčů). Na abstraktní úrovni slouží k řešení rovnic $ax = b$: $x = b/a$.

Původně se racionální čísla používala jako poměry, nikoliv jako čísla (například kvinta je akord dvou tónů o frekvencích v poměru 3:2; trojúhelník o stranách s velikostmi v poměru 5:4:3 je pravoúhlý).

d. Jakou má velikost úhlopříčka čtverce o straně velikosti jedna? Je možné ji vyjádřit jako podíl dvou celých čísel? Není to možné, proto pro popis takových délek nevystačíme s množinou racionálních čísel. Potřebujeme větší množinu, jejíž prvky nazýváme *reálnými čísly*. Definovat přesně množinu reálných čísel je obtížné, proto to nebudeme dělat. Vystačíme s dvěma představami: dekadickým rozvojem a číselnou osou. Více viz odstavec 2.

Reálná čísla jsou často mezní, limitní, hodnotou. Jako třeba v následujícím příkladě: Vypočtěte obvod kruhu o jednotkovém poloměru bez znalosti hodnoty čísla π. Použijte vepsaný mnohoúhelník a vzorce pro goniometrické funkce (viz úkol č. 6).

e. Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v reálném oboru řešení, proto zavádíme komplexní čísla. Zajímavé je, že v oboru komplexních čísel mají kořeny všechny mnohočleny s reálnými koeficienty (i ty s komplexními).

2. Dekadický rozvoj reálných čísel a číselná osa. Dekadický (desetinný) rozvoj čísla π je $3.1415\ldots$. Vyjadřujeme jím odhady přesné hodnoty čísla π: dolní odhad $\pi \geq 3.1415$ a horní odhad $\pi \leq 3.1416$. Každé reálné číslo má dekadický rozvoj, některá reálná čísla mají dva různé rozvoje ($0.\overline{9} = 1$). Více viz [1], poznámka 1.4.30.

Geometricky znázorňujeme reálná čísla na *číselné ose*: zvolíme obraz čísel nula a jedna a v poměru zvolené jednotky pak zobrazujeme (*zobrazení* je matematický termín, připomeňme zobrazení bodů v rovině jako je posunutí, otočení a osová symetrie) další čísla. Přitom každý bod číselné osy odpovídá právě jednomu reálnému číslu a každé reálné číslo odpovídá právě jednomu bodu na číselné ose.

Všimněte si rozdílu: Když zobrazujeme čísla na body na číselné ose, tak každému číslu odpovídá právě jeden bod a dvě různá čísla se zobrazí na různé body. Takové zobrazení nazýváme *vzájemně jednoznačné*. Zobrazení čísel na jejich desetinné rozvoje není vzájemně jednoznačné (některá čísla mají dva různé rozvoje, viz výše uvedený příklad $0.\overline{9} = 1$).

A ještě odbočka do logiky. Rozmyslete si, zda následující výroky říkají jinými slovy totéž: Dvě různá čísla se zobrazí na dva různé body. Každý bod číselné osy odpovídá právě jednomu číslu.

3. Počítání s nepřesnými čísly. V praktických výpočtech málokdy počítáme s přesnými čísly. Nepřesnost je do výpočtů vnášena jednak vstupními hodnotami, které zpravidla získáme měřením a to není nikdy naprosto přesné, a dále zaokrouhlováním během výpočtu.

Interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ pro malou kladnou hodnotu ε, například $\varepsilon = 0.01$, obsahuje čísla, která se od čísla x_0 liší o méně než ε. Na číselné ose mají tato čísla od čísla x_0 vzdálenost menší než ε a jejich dekadický rozvoj má počáteční cifry stejné, přitom počet stejných cifer závisí na hodnotě ε.

Odchylku vypočtené hodnoty od přesné hodnoty budeme nazývat *chybou*. (Přitom tato chyba buď plyne z nemožnosti počítat s přesnými čísly, jako jsou například zmíněné naměřené hodnoty, nebo z našeho rozhodnutí zjednodušit si výpočet. O takovémto zjednodušování bude více později.) Například použitím čísla 3.14 místo přesné hodnoty čísla π zaneseme do výpočtu chybu o velikosti zhruba jedné setiny. Použitím přesnější hodnoty, například 3.14159265, chybu zmenšíme na zhruba 10^{-8}.

Bude nás zajímat, jak se vstupní a zaokrouhlovací chyby šíří výpočtem. O číslech ležících v intervalu $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ budeme říkat, že reprezentují (nebo zadávají, nahrazují) číslo x s přesností (tolerancí, chybou) ε a budeme si pokládat následující otázky:

a. Máme-li číslo x zadané s přesností ε, s jakou přesností jsme schopni spočítat x^2? Například uvažujme $x = 1.2$, $\varepsilon = 0.1$, což znamená, že $x \in (1.1, 1.3)$, fyzikové obvykle píší $x = 1.2 \pm 0.1$. Pak je $x^2 \in (1.1^2, 1.3^2) = (1.21, 1.69) \doteq (1.2, 1.7)$ a tedy $x^2 = 1.45 \pm 0.25$. Vidíme, že chyba se zvětšila asi dvaapůlkrát.

b. Je možné z čísla x získat číslo x^2 se zadanou přesností ε? Jaká přesnost čísla x je k tomu potřeba?

   Například uvažujme číslo $x = 3.1$ a $\varepsilon = 0.2$. Označme přesnost čísla x symbolem δ. Tedy $x \in (3.1 - \delta, 3.1 + \delta)$. Později si ukážeme, že přesnost ε získáme vynásobením přesnosti δ a derivace funkce $x \mapsto x^2$ v bodě x a ta je rovna $2x$. Odtud: $\varepsilon = 2x\delta$, tedy $\delta = \frac{\varepsilon}{2x}$, číselně: $\delta = \frac{0.1}{6.2} \doteq 0.016$.

Místo použití slov přesnost, tolerance můžeme říct rozlišovací schopnost: dostatečně blízké body na číselné ose mohou být pro naše oko nerozlišitelné. Žádné z těchto slov není matematickým termínem (pojmem) a my je budeme používat k vysvětlení matematických pojmů (termínů) *okolí bodu*, *limita* a *spojitost*.

4. Racionální čísla jsou hustá v reálných číslech. Libovolné reálné číslo můžeme s libovolně malou chybou nahradit číslem s konečným desetinným rozvojem (tedy racionálním číslem). Například: chceme-li odmocninu ze dvou nahradit s chybou nepřevyšující 10^{-5}, stačí vzít její desetinný rozvoj s pěti ciframi za desetinnou čárkou, tedy 1.41421. Chyba, které se tímto nahrazením dopustíme je nejvýše $0.00000999999\ldots$, tedy je menší než $0.00001 = 10^{-5}$. Tuto vlastnost racionálních čísel vyjadřujeme slovy v názvu odstavce.

5. Operace, relace, vlastnosti. Reálná čísla jako struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$.

Horní, dolní odhad (závora) množiny. Maximum, minimum. Supremum (nejmenší horní odhad). Infimum (největší dolní odhad).

Vlastnost suprema odlišuje množinu reálných čísel od množiny racionálních čísel.

Zdroje: [1], 1.3, str. 20 – 26.

6. Intervaly. Uzavřený interval budeme značit jinak než na střední škole: množinu čísel větších než a a menších nebo rovných než b budeme značit $(a, b]$. Toto značení používá většina matematické literatury. Více viz [1], označení 1.3.12.

7. Absolutní hodnota. Definice a vlastnosti (nezápornost, absolutní hodnota součinu, absolutní hodnota součtu – trojúhelníková nerovnost).

Geometrický význam absolutní hodnoty: $|x|$ je vzdálenost obrazu čísla x na číselné ose od počátku (budeme říkat vzdálenost *bodu* x od bodu 0); $|x - y|$ je vzdálenost bodu x od bodu y.

Interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ zmiňovaný v odstavci 3 budeme nazývat *okolí bodu* x_0. Rozmyslete si, že $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ platí právě když je $|x - x_0| < \varepsilon$.

Zdroje: [1], 1.3.13, 1.3.14., definice 2.1.4.

8. Úkoly.

1. Načrtněte dva geometrické vektory a k nim jejich rozdíl dvěma způsoby: jednak přičtěte opačný vektor a pak hledejte vektor, který po přičtení k prvnímu vektoru dá druhý vektor.

2. Zvolte si racionální číslo ve tvaru podílu dvou přirozených čísel a vypočtěte jeho desetinný rozvoj. Budete-li dobře počítat, dostanete periodický rozvoj. Zamyslete se nad tím, proč to tak vždy vyjde, proč mají všechna racionální čísla periodický rozvoj.

   Poznámka: konečný rozvoj také považujeme za periodický, např. $1.\overline{0}$.

3. Napište periodický desetinný rozvoj, označte ho x a převeďte ho na podíl dvou celých čísel.

   Návod: vynásobením x vhodnou mocninou deseti dostanete číslo s „podobným“ rozvojem a odečtením x od tohoto násobku dostanete buď celé číslo nebo číslo s konečným rozvojem.

4. Ukažte, že odmocnina ze dvou není racionální číslo.

   Návod: předpokládejte opak, tedy existenci přirozených čísel m, n takových, že $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ a ukažte, že obě čísla m i n jsou sudá. To je spor s tím, že každé racionální číslo je možné vyjádřit v pokráceném tvaru (čitatel a jmenovatel nemají společného dělitele většího jak jedna).

5. Vyhledejte desetinný rozvoj čísla π a napište číslo x s konečným desetinným rozvojem, které se od čísla π liší o méně než 10^{-12}.

6. Načrtněte kružnici a vepište do ní pravidelný šestiúhelník. Jakou velikost má obvod tohoto šestiúhelníku? Počítejte v jednotkách poloměru kružnice.

   Do stejného obrázku načrtněte část pravidelného dvanáctiúhelníku, stačí jedna nebo dvě hrany. Spočítejte velikosti úhlů a velikosti úseček v tomto obrázku. Jakou velikost má obvod tohoto pravidelného dvanáctiúhelníku?

   Vyjádřete obvod pravidelného n-úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice pomocí vhodného úhlu o velikosti $2\pi/n$ nebo π/n. Kde tyto úhly v n-úhelníku naleznete?

   Zvětšíme-li počet stran vepsaného n-úhelníku dvakrát, tak se zmiňované úhly dvakrát zmenší. Odtud dostanete vztah, kterým spočítáte obvod $2n$-úhelníku ze známé hodnoty obvodu n-úhelníku.

Výsledek můžete vyjádřit v rozličných tvarech, jedna z možností je

$$\begin{array}{lll} \varphi_6 = \frac{\pi}{3} & \cos\varphi_6 = \frac{1}{2} & O_6 = 6 \\ \varphi_{12} = \frac{\varphi_6}{2} & \cos\varphi_{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi_6}{2}} & O_{12} = \frac{O_6}{\cos\varphi_{24}} \\ \varphi_{24} = \frac{\varphi_{12}}{2} & \cos\varphi_{24} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi_{12}}{2}} & O_{24} = \frac{O_{12}}{\cos\varphi_{48}} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Druhá možnost je vyjádřit stranu pravidelného $2n$-úhelníku a_{2n} pomocí a_n a poté spočítat obvod $O_n = na_n$. Vyjde

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_n/2/\sqrt{(1+\sqrt{1-a_n^2/4})/2} \\ O_{2n} &= O_n/\sqrt{(1+\sqrt{1-a_n^2/4})/2} \end{aligned}$$

7. Určete infimum a supremum množiny $\mathcal{M} = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Má množina $\mathcal{M}$ maximální a minimální prvek?

   Poznámka: $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ značí množinu všech hodnot $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tedy množinu $\{1, 0.5, 0.\overline{3}, 0.25, 0.2, \dots\}$.

8. Určete infimum a supremum množiny $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$, kde O_n je obvod pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice o poloměru velikosti jedna. Má množina $\mathcal{O}$ maximální a minimální prvek?

9. Které z vlastností množiny reálných čísel 1 – 13 z [1] nemá množina racionálních čísel?

10. Které z vlastností množiny reálných čísel 1 – 13 z [1] nemá množina celých čísel?

11. Které z vlastností množiny reálných čísel 1 – 13 z [1] nemá množina přirozených čísel?

12. Dokažte, že pro každou dvojici reálných čísel x, y platí $|x + y| \leq |x| + |y|$.
    Návod: odstraňte absolutní hodnotu – rozdělte rovinu na části podle znaménka výrazů x, y, $x + y$, na každé části vyjádřete výraz $|x| + |y| - |x + y|$ bez absolutních hodnot a ukažte, že je nezáporný.

9. Pomocné úlohy.

1. Načrtněte pravoúhlý trojúhelník a odvoďte vzorec $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ z Pythagorovy věty.

   Návod: Vyjádřete výraz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ pomocí stran trojúhelníku a pak použijte Pythagorovu větu k úpravě.

2. Načrtněte rovnostranný trojúhelník s jednou jeho výškou. Použijte Pythagorovu větu k odvození hodnot goniometrických funkcí úhlů $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{6}$.

3. Načrtněte rovnoramenný ostroúhlý trojúhelník ABC. Vrchol, v němž se protínají ramena, označte C. Z vrcholu A spusťte výšku a její patu označte A'. Ukažte, že velikost úhlu $A'AB$ je polovina velikosti úhlu ACB.

4. V příkladu 3 zvolte velikost ramene rovnu jedné a velikost úhlu ACB označte γ. Pomocí úhlu γ a jeho goniometrických funkcí postupně vyjádřete velikosti úseček AA', CA', $A'B$, AB. Odtud pak vypočtěte $\cos\frac{\gamma}{2}$ jako podíl velikostí úseček AA' a AB.

5. Odvoďte graficky Pythagorovu větu: načrtněte čtverec o straně velikosti $a + b$ a do každého jeho vrcholu přikreslete pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami velikosti a, b. Nakreslete je tam tak, aby jejich přepony tvořily čtverec. Obsah původního (většího) čtverce vyjádřete dvěma způsoby, jednak jako $(a + b)^2$ a dále jako $c^2 + 4\frac{ab}{2}$.

Reference

[1] J. Veselý. Základy matematické analýzy.
`www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf`.