Limity funkcí, okolí bodu, základní přehled
31. října 2018

Cílem tohoto textu je uvést přehled okolí bodu v $\mathbb{R}^*$ a přehled definic limit funkce reálné proměnné.

Okolí bodu.

ε označuje kladné reálné číslo a m reálné číslo

pro $a \in \mathbb{R}$ je interval	$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$	okolím bodu a	značíme $\mathcal{B}_\varepsilon(a)$
	$(a-\varepsilon, a)$	levým okolím bodu a	
	$(a, a+\varepsilon)$	pravým okolím bodu a	
množina	$(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$	prstencovým okolím bodu a	značíme $\mathcal{P}_\varepsilon(a)$
interval	$(m, +\infty)$	je okolím bodu $+\infty$	
interval	$(-\infty, m)$	je okolím bodu $-\infty$	

Limity.

1. Vlastní ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$
   $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(L))$

2. Nevlastní ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \{+\infty, -\infty\}$
   $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ pokud $(\forall m \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) \in (m, +\infty))$
   $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ pokud $(\forall m \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) \in (-\infty, m))$

3. Vlastní v nevlastním bodě: $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, $L \in \mathbb{R}$
   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in (m, +\infty))(f(x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(L))$
   $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in (-\infty, m))(f(x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(L))$

4. Nevlastní v nevlastním bodě: $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, $L \in \{+\infty, -\infty\}$
   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ pokud
   $$(\forall m_L \in \mathbb{R})(\exists m_x \in \mathbb{R})(\forall x \in (m_x, +\infty))(f(x) \in (m_L, +\infty))$$
   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ pokud
   $$(\forall m_L \in \mathbb{R})(\exists m_x \in \mathbb{R})(\forall x \in (m_x, +\infty))(f(x) \in (-\infty, m_L))$$
   $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ pokud
   $$(\forall m_L \in \mathbb{R})(\exists m_x \in \mathbb{R})(\forall x \in (-\infty, m_x))(f(x) \in (m_L, +\infty))$$
   $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ pokud
   $$(\forall m_L \in \mathbb{R})(\exists m_x \in \mathbb{R})(\forall x \in (-\infty, m_x))(f(x) \in (-\infty, m_L))$$

Jednotnotný zápis: označíme-li
$\mathcal{P}(+\infty) = \mathcal{B}(+\infty) = (m, +\infty)$,
$\mathcal{P}(-\infty) = \mathcal{B}(-\infty) = (-\infty, m)$,
a u okolí vlastních bodů vynecháme index ε, lze limitu pro $x_0, L \in \mathbb{R}^*$ napsat jednotně
$(\forall \mathcal{B}(L))(\exists \mathcal{P}(x_0))(\forall x \in \mathcal{P}(x_0))(f(x) \in \mathcal{B}(L))$

Jednostranné limity.

1. Limita zprava: $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$
   $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ pokud $(\forall \mathcal{B}(L))(\exists \delta > 0)(\forall x(x_0, x_0+\delta))(f(x) \in \mathcal{B}(L))$

2. Limita zleva: $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$
   $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ pokud $(\forall \mathcal{B}(L))(\exists \delta > 0)(\forall x(x_0-\delta, x_0))(f(x) \in \mathcal{B}(L))$

Platí (a platnost je vidět z definic):

1. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$
   $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow (\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L)$
   Slovy: oboustranná limita existuje, právě když existují obě jednostranné a jsou si rovny. Oboustranná pak nabývá stejné hodnoty jako jednostranné.

2. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$
   Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě když má v bodě x_0 limitu a ta je rovna funkční hodnotě.
   Formálně: f je spojitá v $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. Podobně pro jednostrannou spojitost:

   Funkce f je spojitá v bodě x_0 zprava právě když má v bodě x_0 limitu zprava a ta je rovna funkční hodnotě.
   Formálně: f je spojitá v x_0 zprava $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

   Funkce f je spojitá v bodě x_0 zleva právě když má v bodě x_0 limitu zleva a ta je rovna funkční hodnotě.
   Formálně: f je spojitá v x_0 zleva $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.