Logika, výroky, množiny

Martina Šimůnková

23. srpna 2017

Učební text k předmětu Matematická analýza pro studenty FP TUL

Jazyk matematiky

Budeme používat dva jazyky: *jazyk matematiky* a běžně používaný jazyk. Matematický jazyk je na rozdíl od běžného jazyka přesný – nepřipouští nejednoznačné významy.

Budeme používat matematické pojmy: několik málo pojmů budeme chápat intuitivně, ostatní *definujeme* matematickým jazykem pomocí dříve zavedených (definovaných) pojmů. Toto pravidlo o použití pouze dříve definovaných pojmů při definování nových dnes porušíme (a pokud jej porušíme někdy příště, upozorníme na to). Dnes se budeme zabývat pojmy z logiky a teorie množin a většinou je budeme zavádět intuitivním způsobem. Na příkladu pojmu množina si ukážeme úskalí intuitivního chápaní pojmů.

Vztahy mezi pojmy budeme zpočátku formulovat matematickým i běžným jazykem (než si na matematický jazyk zvyknete) a formulace matematickým jazykem budeme označovat jako *věty* a *lemmata* (první pád jednotného čísla je lemma). Důležitější tvrzení zpravidla označíme jako věty, pomocná tvrzení jako lemmata. Tvrzení ve větách a lemmatech zpravidla zformulujeme jako implikace skládající se z předpokladu a závěru (předpoklad $\Rightarrow$ závěr; slovně: jestliže platí předpoklad, pak platí závěr). Každá věta (i lemma) má svůj důkaz. Bez důkazu není větou, ale pouze domněnkou (hypotézou).

Shrnutí

Definicemi zavádíme nové pojmy – vymezujeme jejich obsah. Korektní definice smí používat jen již dříve definované pojmy. Abychom mohli něčím začít, chápeme první pojmy pouze intuitivně, tedy rezignujeme na jejich korektní definici. I později budeme některé pojmy, jejichž korektní definice by pro nás byla příliš náročná, zavádět pouze intuitivně. Vždy na to upozorníme.

Vztahy mezi definovanými pojmy budeme formulovat v matematických *větách* a *lemmatech*. Každá věta i lemma má svůj důkaz.

Základy výrokové a predikátové logiky

Výrok je jeden z pojmů, který budeme chápat intuitivně jako (gramatickou) větu, pro niž má smysl uvažovat, zda je pravdivá nebo nepravdivá. O pravdivém výroku budeme říkat: *platí*, *je splněn* případně *je platný*, *je pravdivý*. O nepravdivém: *neplatí*, *není splněn*, *není platný*, *není pravdivý*.

Pro rychlejší vyjadřování se naučíme výroky zapisovat pomocí matematických symbolů a z takovýchto výroků pak budeme vytvářet složitější výroky pomocí logických operací: binární konjunkce $\wedge$, disjunkce $\vee$, implikace $\Rightarrow$, ekvivalence $\Leftrightarrow$ a unární negace $\neg$.

Všechny tyto operace znáte ze střední školy a s některými z nich, konkrétně s konjunkcí (a zároveň), s negací a s ekvivalencí pravděpodobně nemáte problémy. Největší problém dělá studentům implikace, proto se jí budeme podrobněji věnovat v následujícím odstavci. K disjunkci řekněme to, že spojka nebo, která ji vyjadřuje, má v hovorové řeči dva různé významy, které jsou v psané řeči rozlišené přítomností nebo absencí čárky. V matematickém jazyce má spojka nebo jen jeden význam – připouští platnost obou výroků. Viz následující tabulka.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \vee B$	1	1	1	0

Proměnná je symbol, za který dosazujeme. Musí být vždy jasné, jaké objekty lze za symbol dosazovat.

Výroková forma je gramatická věta obsahující proměnné, která se stane výrokem buď po dosazení za symbol nebo po kvantifikaci. Termín (pojem) *predikát* z matematické logiky zhruba odpovídá našemu termínu výroková forma.

Příliš abstraktní a málo srozumitelné? Snad to napravíme příkladem výrokové formy: *Reálné číslo x je větší než 2.* Pomocí matematických symbolů tuto výrokovou formu zapíšeme: $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$, případně jen: $x > 2$, pokud je z kontextu jasné, že x je reálné číslo.

Dosazením $x = 4$ dostaneme z naší výrokové formy pravdivý výrok.

Kvantifikací $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 2)$ – čteme: pro každé reálné číslo x platí, že x je větší než 2 – dostaneme nepravdivý výrok.

Kvantifikací $(\exists x \in \mathbb{R})(x > 2)$ – čteme: existuje reálné číslo x takové, že x je větší než 2 – dostaneme pravdivý výrok.

Shrnutí

S pojmy výrok a proměnná asi problém mít nebudete, navíc je znáte ze střední školy. O výrokových formách stačí, když si zapamatujete, že pro každou množinu $\mathcal{M}$, třeba $\mathcal{M} = (0,1) \cup (2,4)$, je $x \in \mathcal{M}$ výroková forma s proměnnou x. A naopak k výrokové formě s jednou proměnnou, třeba k $x^2-2x-3 = 0$, přiřazujeme množinu prvků x, po jejichž dosazení do výrokové formy dostaneme pravdivý výrok. V našem případě množinu získáme vyřešením rovnice a dostaneme dvouprvkovou množinu $\{-1, 3\}$.

Implikace

Jak jsme psali výše, pochopit správně implikaci je celkem obtížné. Ukážeme zde dvě hlavní úskalí. První úskalí je ve slovním vyjádření – implikaci zpravidla formulujeme *jestliže ..., pak ...*, ale v běžné řeči touto formulací někdy vyjadřujeme implikaci a někdy ekvivalenci. V matematickém jazyce formulujeme ekvivalenci slovy *právě když* případně *když a jen když* nebo *tehdy a jen tehdy.*

Druhé úskalí jsou dvě „tváře" implikace – její předpoklad a závěr spolu zpravidla souvisí, ale není to nutné.

1. Pokud spolu výroky A, B nesouvisí, určíme pravdivost implikace $A \Rightarrow B$ pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \Rightarrow B$	1	0	1	1

Příklad: Jestliže ... (doplňte výrok dle své fantazie), tak jsem čínský papež.

Všimněte si, že implikace $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s disjunkcí $\neg A \vee B$. Dále si všimněte, že negace $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní s konjunkcí $A \wedge \neg B$.

2. Nás budou zajímat případy, kdy $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy s proměnnou x, tyto výrokové formy spolu souvisí a umíme dokázat, že platí

$$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Pak z platnosti $A(x)$ a implikace $A(x) \Rightarrow B(x)$ vyvodíme platnost $B(x)$. Tento způsob vyvození se v logice nazývá *modus ponens.*

Jako příklad uveďme: Má-li funkce f na intervalu I kladnou derivaci, pak je f na I rostoucí. Funkce f přiřadí vzoru $x \in \mathbb{R}$ obraz x^3, tedy $f : x \mapsto x^3$ a její derivace je $f' : x \mapsto 3x^2$. Protože víme, že funkce f' je na $\mathbb{R}$ kladná, usoudíme odtud, že f je na $\mathbb{R}$ rostoucí.

A nazýváme *předpokladem* implikace $A \Rightarrow B$, B jejím *závěrem.* Dále říkáme: A je *postačující podmínka* B, B je *nutná podmínka* A. Pokud platí ekvivalence $A \Leftrightarrow B$, říkáme, že A je *nutná a postačující podmínka* B.

Příklad: pro úspěšné absolvování předmětu AN1E musíte nejdříve získat zápočet, pak teprve budete moci jít ke zkoušce. Říkáme, že získání zápočtu je nutnou podmínkou k úspěšnému složení zkoušky, ale není podmínkou postačující. Platí implikace: má-li student zkoušku, má i zápočet, ale nemusí platit: má-li student zápočet, má i zkoušku. Z faktu, že má někdo úspěšně složenou zkoušku, můžeme odvodit, že má i získaný zápočet – z tohoto hlediska je zkouška postačující podmínka pro zápočet.

Cvičení: Máme rozhodnout, zda je pravdivý výrok V:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x > 1 \Rightarrow x \geq 1).$$

První způsob: Úvahou určíme, že pro každé reálné číslo x platí: je-li x větší než jedna, platí pro něj, že je větší nebo rovno jedné. Všimněte si, že pro $x \leq 1$ je implikace

$$x > 1 \Rightarrow \text{jakýkoliv výrok}$$

pravdivá. Výrok V tedy můžeme ekvivalentně přepsat

$$(\forall x > 1)(x \geq 1)$$

a čteme jej: pro každé x větší než jedna platí, že x je větší nebo rovno jedné.

Druhý způsob: Není-li nám výše uvedená úvaha jasná, pomůžeme si převedením implikace

$$x > 1 \Rightarrow x \geq 1$$

na disjunkci

$$x \leq 1 \vee x \geq 1,$$

která je pravdivá pro každé reálné x. Odtud usoudíme, že výrok V je pravdivý.

Na procvičení výše uvedeného vysvětlete, proč jsou následující výroky ekvivalentní

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x > 2 \Rightarrow x^3 > 7x^2 - 17x), \qquad (\forall x \in (2, +\infty))(x^3 > 7x^2 - 17x)$$

a rozhodněte, zda jsou pravdivé výroky

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \emptyset \Rightarrow x^2 < 0), \qquad (\forall x \in \emptyset)(x^2 < 0).$$

Shrnutí

Implikace $A \Rightarrow B$ je v matematice zajímavá jen v případě, že její platnost umíme dokázat ze souvislostí mezi výroky A a B. Pak z její platnosti a z platnosti výroku A vyvodíme platnost výroku B.

Než se naučíte s implikací pracovat, bude pro nás možná těžké souvislosti spatřit – pomožte si v tom případě převedením implikace $A \Rightarrow B$ na ekvivalentní disjunkci $\neg A \vee B$.

Negace implikace $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní s konjunkcí $A \wedge \neg B$.

Výroky ve tvaru

$$(\forall x)((x \in \mathcal{A}) \Rightarrow \text{výroková forma s proměnnou } x)$$

můžeme ekvivalentně přepsat

$$(\forall x \in \mathcal{A})(\text{výroková forma s proměnnou } x).$$

Je to proto, že implikace s neplatným předpokladem je vždy pravdivá.

Výrok A v implikaci $A \Rightarrow B$ nazýváme předpokladem, výrok B závěrem. Dále říkáme, že A je postačující podmínka B a že B je nutná podmínka A.

V případě ekvivalence říkáme, že A je nutná a postačující podmínka B.

Obměněná a obrácená implikace

Srovnejme následující tři výroky

1. Jestliže student nemá z předmětu AN1E zápočet, nemá ani zkoušku.

2. Jestliže student nemá z předmětu AN1E zkoušku, nemá ani zápočet.

3. Jestliže student má z předmětu AN1E zkoušku, má i zápočet.

Snad je jasné, že výroky 1 a 2 vyjadřují odlišnou skutečnost a že zatímco výrok 1 je obecně pravdivý, výrok 2 nikoliv. Na druhé straně výroky 1 a 3 vyjadřují stejnou skutečnost.

Rozeberme tuto situaci podrobněji. Výrok 1 zapíšeme jako implikaci $A \Rightarrow B$, výrok 2 jako implikaci $B \Rightarrow A$ a výrok 3 jako implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$. Výroky 1, 3 jsou nepravdivé pouze v případě, že výrok A je nepravdivý a výrok B je pravdivý (můžete to například zjistit z tabulky pravdivostních hodnot). Výrok 2 je pravdivý vždy vyjma případu, kdy je A pravdivý a B nepravdivý.

Terminologie je následující: implikaci $B \Rightarrow A$ nazýváme obrácenou implikací implikace $A \Rightarrow B$ a implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$ nazýváme obměnou implikace $A \Rightarrow B$ nebo také obměněnou implikací implikace $A \Rightarrow B$.

Množiny

Vystačíme s intuitivní představou množiny jako souhrnu prvků dané vlastnosti. Matematici si s touto představou vystačili až do začátku minulého století, kdy si uvědomili, že v sobě obsahuje spor. Tento spor si stručně popíšeme: Býti množinou je také vlastnost, uvažujme tedy množinu všech množin a označme ji $\mathcal{M}$. Má zvláštní vlastnost, že obsahuje sama sebe jako svůj prvek, tedy $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$. Uvažujme nyní množiny, které tuto vlastnost nemají a množinu takovýchto množin označme $\mathcal{S}$. Tedy množina $\mathcal{N}$ je prvkem $\mathcal{S}$ právě když platí $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$.

Pro rychlejší vyjadřování budeme množiny, které samy sebe neobsahují jako svůj prvek, nazývat slušnými. Chceme rozhodnout, zda je $\mathcal{S}$ slušná. Pokud je slušná, tak je prvkem množiny slušných množin, tedy je prvkem množiny $\mathcal{S}$, a tedy obsahuje sama sebe, a tedy není slušná. Pokud není slušná, tak není prvkem množiny slušných množin, tedy není prvkem množiny $\mathcal{S}$, a tedy neobsahuje sama sebe, a tedy je slušná. *(Symbolicky zapsáno: chceme rozhodnout, zda platí $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$ nebo $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$. Protože pro $\mathcal{N} \in \mathcal{S}$ platí $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$, tak dosazením $\mathcal{S}$ za $\mathcal{N}$ dostaneme, že z $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$. Podobně $\mathcal{N} \notin \mathcal{S}$ znamená $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$, a tedy z $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$.)*

Pro odstranění popsaného rozporu (tzv. Russellova paradoxu) byla před sto lety vybudovaná axiomatická teorie množin, která připouští, aby prvky množiny byly jiné množiny, ale nepřipouští, aby nějaká množina byla prvkem sama sebe. Tedy nepřipouští existenci množiny všech množin.

Množiny budeme zapisovat několika způsoby:

1. Konečné množiny výčtem prvků, například množinu jednociferných kladných celých čísel zapíšeme $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, pomůžeme si tečkami $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, 9\}$.

2. Množinu prvků $x \in \mathcal{U}$ dané vlastnosti $V(x)$ zapíšeme:

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{U} : V(x)\}.$$

Například množinu reálných kořenů nerovnice $x^2 < 4$ můžeme zapsat

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}.$$

Jak snad víte, nebo alespoň dokážete spočítat, je $\mathcal{N}$ intervalem: $\mathcal{N} = (-2, 2)$. Podobně zapíšeme obor hodnot funkce f jako množinu

$$\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})(y = f(x))\}.$$

Čteme: množina všech reálných čísel y, pro něž existuje reálné číslo x takové, že platí $y = f(x)$.

3. Obor hodnot funkce f lze zapsat ještě dalším způsobem

$$\{f(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

což čteme: množina všech hodnot $f(x)$, kde x je reálné číslo. Například množinu všech sudých celých čísel zapíšeme

$$\mathcal{S} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Shrnutí

Vystačíme s představou množiny jako souhrnu prvků dané vlastnosti. Množiny prvků ze zadané množiny $\mathcal{U}$ (pod $\mathcal{U}$ si můžete představit třeba množinu reálných čísel $\mathbb{R}$), které mají vlastnost V – například $x^4 = 5$ – zapíšeme

$$\{x \in \mathcal{U} : V(x)\}, \text{ v našem příkladě } \{x \in \mathbb{R} : x^4 = 5\}.$$

Množinu funkčních hodnot funkce f na intervalu I zapíšeme

$$\{f(x) : x \in I\}.$$

Podstatné je, že pro libovolnou dvojici prvek x a množina $\mathcal{A}$ je vždy platný právě jeden z výroků $x \in \mathcal{A}$, $x \notin \mathcal{A}$.

Výrok $x \in \mathcal{A}$ čteme *x leží v $\mathcal{A}$*, *x je prvkem $\mathcal{A}$* nebo $\mathcal{A}$ *obsahuje x*. Výrok $x \notin \mathcal{A}$ čteme *x neleží v $\mathcal{A}$*, *x není prvkem $\mathcal{A}$* případně $\mathcal{A}$ *neobsahuje x*. Dalším často používaným obratem je *x patří do $\mathcal{A}$*. Přečtěte si v [JV], proč to není příliš šikovný způsob vyjádření.

Operace s množinami

Definice. *Sjednocením* množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazveme množinu, která obsahuje právě ty prvky, které jsou prvkem alespoň jedné z množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Sjednocení množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ označujeme symbolem $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Fomálně definici zapíšeme:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} := \{x : x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$$

Znak := případně =: znamená, že symbol na straně dvojtečky je definován výrazem na druhé straně.

Definice. *Průnikem* množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazveme množinu

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} := \{x : x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}.$$

Definice. *Doplňkem* množiny $\mathcal{A}$ nazveme množinu

$$\mathcal{A}^{\complement} := \{x : x \notin \mathcal{A}\}.$$

Jako cvičení uveďte slovní definici průniku a doplňku.

Definice. *Rozdílem* množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazveme množinu

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} := \{x : x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}.$$

Definice. Řekneme, že množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou *si rovny* (a zapisujeme to $\mathcal{A} = \mathcal{B}$), pokud platí

$$(\forall x)(x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{B}).$$

Definice. Řekneme, že množina $\mathcal{A}$ je *podmnožinou* množiny $\mathcal{B}$ (zapisujeme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ případně $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$), pokud platí

$$(\forall x)(x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B}).$$

O množině $\mathcal{B}$ říkáme, že je *nadmnožinou* množiny $\mathcal{A}$. Je dobré se vyhnout obratu, že množina $\mathcal{B}$ obsahuje množinu $\mathcal{A}$, protože bychom jej správně měli chápat ve smyslu $\mathcal{B} \ni \mathcal{A}$ a nikoliv $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$.
Často se místo znaku $\subseteq$ používá znak $\subset$ se stejným významem (není mezi nimi rozdíl podobný $\leq$ a $<$) a pro „ostrou" inkluzi se používá symbol $\subsetneq$. V tomto textu se symbolu $\subset$ vyhýbáme, protože jej považujeme za mírně matoucí.

Definice. *Kartézským součinem* množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nazýváme množinu uspořádaných dvojic

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{[x, y] : x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}.$$

Pojem (termín) uspořádané dvojice chápeme intuitivně.

Výroky a množiny – vzájemné souvislosti

V dalším budeme uvažovat universum – množinu $\mathcal{U}$ (pod $\mathcal{U}$ si můžete představit třeba množinu reálných čísel $\mathbb{R}$) – a na ní výrokové formy s jednou proměnnou $A(x)$, $B(x)$ a množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ prvků, pro něž jsou tyto výrokové formy splněny

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{U} : A(x)\}, \qquad \mathcal{B} = \{x \in \mathcal{U} : B(x)\}.$$

Rozmyslete si, že platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \cup \mathcal{B} &= \{x \in \mathcal{U} : A(x) \vee B(x)\} \\
\mathcal{A} \cap \mathcal{B} &= \{x \in \mathcal{U} : A(x) \wedge B(x)\} \\
\mathcal{U} \setminus \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{\complement} &= \{x \in \mathcal{U} : \neg A(x)\} \\
\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} &= \{x \in \mathcal{U} : A(x) \wedge \neg B(x)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \mathcal{B} &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})(A(x) \Leftrightarrow B(x)) \\
\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} &\Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})(A(x) \Rightarrow B(x))
\end{aligned}$$

Pro výroky i pro množiny platí De Morganovy vzorce

$$\begin{aligned}
\neg(A \vee B) &= \neg A \wedge \neg B, \\
\neg(A \wedge B) &= \neg A \vee \neg B, \\
(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^{\complement} &= \mathcal{A}^{\complement} \cap \mathcal{B}^{\complement}, \\
(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^{\complement} &= \mathcal{A}^{\complement} \cup \mathcal{B}^{\complement}
\end{aligned}$$

a distributivní zákony

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C), \\ A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \\ \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) &= (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}), \\ \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) &= (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Se vztahem implikace a ekvivalence

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{je ekvivalentní s} \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

úzce souvisí vztah rovnosti množin a vztah býti podmnožinou (inkluze)

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \quad \text{je ekvivalentní s} \quad (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}).$$

Konečné, spočetné a nespočetné množiny

Vystačíme s intuitivní představou *konečné množiny* a *počtu* jejích prvků.

Nekonečné množiny dělíme na spočetné a nespočetné. Množinu $\mathcal{M}$ nazveme *spočetnou*, pokud je možné její prvky srovnat do posloupnosti – můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{M} = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Matematická literatura není jednotná v zahrnutí či nezahrnutí konečných množin mezi spočetné. (Naše definice je zahrnuje. Všimněte si, že nikde není požadováno, že prvky x_k musí být navzájem různé.)

Všechny ostatní nekonečné množiny nazýváme *nespočetnými*. Příkladem nespočetné množiny je množina reálných čísel (důkaz viz [JV], lemma 1.4.31).

Operace s více množinami a jejich vlastnosti

Sjednocení a průnik definujeme i pro více než dvě množiny. Sjednocení konečného počtu množin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ budeme značit $\cup_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$. Definujeme jej následovně

Definice. *Sjednocením* množin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ nazýváme množinu, která obsahuje prvky obsažené v alespoň jedné z množin $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$. Formálně zapsáno

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k := \{x : (\exists k \in \{1, \dots, n\})(x \in \mathcal{A}_k)\}$$

Podobně definujeme sjednocení nekonečného spočetného množství množin

Definice. *Sjednocením* množin $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$ nazýváme množinu, která obsahuje prvky obsažené v alespoň jedné z množin $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Formálně zapsáno

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k := \{x : (\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 1)(x \in \mathcal{A}_k)\}$$

(Poznámka: $k \geq 1$ jsme uvedli proto, abychom čtenáře ušetřili mudrování nad tím zda je nula přirozené číslo.)

Někdy potřebujeme pracovat se sjednocením množin, kterých je příliš mnoho, abychom je mohli oindexovat přirozenými čísly. Indexovou množinu označíme jinak – třeba I a definice bude podobná.

Definice. *Sjednocením* množin $\mathcal{A}_k$, $k \in I$ nazýváme množinu, která obsahuje prvky obsažené v alespoň jedné z množin $\mathcal{A}_k$, $k \in I$. Formálně zapsáno

$$\bigcup_{k \in I} \mathcal{A}_k := \{x : (\exists k \in I)(x \in \mathcal{A}_k)\}$$

Podobně definujeme průnik. Napíšeme jen poslední definici, ostatně předchozí dvě jsou jen její speciální případy pro $I = \{1, \ldots, n\}$ a $I = \mathbb{N}$.

Definice. *Průnikem* množin $\mathcal{A}_k$, $k \in I$ nazýváme množinu, která obsahuje prvky obsažené ve všech množinách $\mathcal{A}_k$, $k \in I$. Formálně zapsáno

$$\bigcap_{k \in I} \mathcal{A}_k := \{x : (\forall k \in I)(x \in \mathcal{A}_k)\}$$

Na závěr uveďme De Morganovy vzorce a distributivní zákony pro sjednocení a průnik více množin

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{k \in I} \mathcal{A}_k\right)^{\complement} &= \bigcap_{k \in I} \left(\mathcal{A}_k^{\complement}\right), \\
\left(\bigcap_{k \in I} \mathcal{A}_k\right)^{\complement} &= \bigcup_{k \in I} \left(\mathcal{A}_k^{\complement}\right), \\
\mathcal{A} \cup \left(\bigcap_{k \in I} \mathcal{B}_k\right) &= \bigcap_{k \in I} (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}_k), \\
\mathcal{A} \cap \left(\bigcup_{k \in I} \mathcal{B}_k\right) &= \bigcup_{k \in I} (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_k).
\end{aligned}$$