

Úlohy z AN1E/KA1 na cvičení 8. 10. 2018

1. Přečtěte výrazy

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1} = 1 - 3x\} \\ \mathcal{B} &= \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1 = (1 - 3x)^2\}\end{aligned}$$

a zjistěte, zda platí

- (a) $1 \in \mathcal{A}$, $1 \in \mathcal{B}$,
 - (b) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$,
 - (c) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
2. Zjistěte, zda platí (jednu inkluzi zdůvodněte stejně jako v předchozím příkladě, druhou vyřešením kvadratické rovnice a ověřením, zda její kořeny splňují rovnici s odmocninou)

$$\{x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{4 - 3x} = 2\} = \{x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 = 4 - 3x\}$$

3. Řešte v \mathbb{R} rovnice

(a)
$$\sqrt{3x - 5} = 1 - x$$

(b)
$$x - \sqrt{x + 4} = 2$$

(c)
$$\sqrt{x} + \sqrt{2 - x} = 2$$

4. Použijte binomickou větu k úpravě výrazu

$$\frac{(x + h)^6 - x^6}{h}$$

5. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \geq -x$ platí

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

NÁVOD: použijte ag nerovnost na součin $n + 1$ čísel $1 \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

6. Upravte pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ výraz $1/(1 - \frac{1}{n})^n$ na $(1 + \frac{1}{n-1})^n$.
7. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí

$$(1 + 1/(n-1))^n > (1 + 1/n)^{n+1}.$$

NÁVOD: použijte úpravu 6 a příklad 5 pro $x = -1$.

8. Dokažte ag nerovnost pro 8 čísel.
9. Dokažte ag nerovnost pro 7 čísel.
10. (a) Dosad'te do výrazu $\frac{1}{k!} \binom{n}{k}$ postupně $k = 2, 3, 4, 5$ a upravte je do tvaru $\frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots$.
- (b) Využijte binomickou větu a předchozí příklad k úpravě $(1 + \frac{1}{n})^n$ do tvaru

$$2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \frac{1}{4!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n}) + \dots$$

11. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$, tedy, že posloupnost $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ je rostoucí.

NÁVOD: buď využijte předchozí cvičení nebo použijte ag nerovnost.