Úlohy z čísel

Příklady 10 – 12 jsou povinné pro studenty předmětu Kalkulus 1.

1. Načrtněte dva geometrické vektory a k nim jejich rozdíl dvěma způsoby: jednak přičtěte opačný vektor a pak hledejte vektor, který po přičtení k prvnímu vektoru dá druhý vektor.

2. Zvolte si racionální číslo ve tvaru podílu dvou přirozených čísel a vypočtěte jeho desetinný rozvoj. Budete-li dobře počítat, dostanete periodický rozvoj. Zamyslete se nad tím, proč to tak vždy vyjde, proč mají všechna racionální čísla periodický rozvoj.

   Poznámka: konečný rozvoj také považujeme za periodický, např. $1.\overline{0}$.

3. Napište periodický desetinný rozvoj, označte ho x a převeďte ho na podíl dvou celých čísel.

   Návod: vynásobením x vhodnou mocninou deseti dostanete číslo s „podobným“ rozvojem a odečtením x od tohoto násobku dostanete buď celé číslo nebo číslo s konečným rozvojem.

4. Vyhledejte desetinný rozvoj čísla π a napište číslo x s konečným desetinným rozvojem, které se od čísla π liší o méně než 10^{-12}.

5. Které z vlastností množiny reálných čísel (1) až (13) má množina racionálních čísel?

6. Které z vlastností množiny reálných čísel (1) až (13) má množina celých čísel?

7. Které z vlastností množiny reálných čísel (1) až (13) má množina přirozených čísel?

8. Vyjádřete ze vztahu $2xy - 3x + 4y + 5 = 0$ proměnnou y jako funkci proměnné x. Při každé úpravě uveďte, jaké axiomy reálných čísel používáte.

9. Vyjádřete ze vztahu $(2x + t)^2 = 4x^2 + 1$ proměnnou x jako funkci proměnné t. Při každé úpravě uveďte, který z axiomů reálných čísel používáte.

10. Dokažte, že z axiomů (1) – (8) reálných čísel plyne pro $a \in \mathbb{R}$

    (a) $0a = 0$
    Návod: upravte dvojím způsobem vztah $(1 + 0)a - a$.

    (b) $(-1)a = -a$
    Návod: použijte definici opačného prvku.

    (c) $-(-a) = a$
    Návod: použijte definici opačného prvku.

    (d) $(-1)(-1) = 1$
    Návod: použijte vztahy 10b, 10c.

11. Určete infimum a supremum množiny $\mathcal{M} = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Má množina $\mathcal{M}$ maximální a minimální prvek?

    Poznámka: $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ značí množinu všech hodnot $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tedy množinu $\{1, 0.5, 0.\overline{3}, 0.25, 0.2, \dots\}$.

12. Určete infimum a supremum množin $\mathcal{M}_1 = \{1/2^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, $\mathcal{M}_1 = \{0.9^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, Mají množiny $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ maximální a minimální prvek?

13. Dokažte, že pro každou dvojici reálných čísel x, y platí $|x+y| \leq |x|+|y|$. Načrtněte soustavu souřadnou a vyšrafujte tu její část, ve které platí ostrá nerovnost.
    Návod: odstraňte absolutní hodnotu – rozdělte rovinu na části podle znaménka výrazů x, y, $x + y$, na každé části vyjádřete výraz $|x| + |y| - |x + y|$ bez absolutních hodnot a ukažte, že je nezáporný.

14. Zjistěte která $x \in \mathbb{R}$ vyhovují nerovnici

$$\sqrt{x^2 + 5} \leq x + 1$$

15. Přečtěte

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{7 - 3x} > x - 1\}$$

    a vyjádřete množinu M jako interval, případně sjednocení intervalů.