

Úlohy z funkcí – spojitost, limity

1. Načrtněte graf kvadratické funkce (např. $f(x) = x^2 - 4x + 2$), zvolte bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (např. $x_0 = 1$), zvolte $\varepsilon > 0$ (např. $\varepsilon = 0.6$) a na ose y vyznačte okolí $\mathcal{B}_\varepsilon(f(x_0))$. Na ose x pak vyznačte okolí $\mathcal{B}_\delta(x_0)$ takové, že pro $x \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(x_0))$.
2. Načrtněte graf funkce f a ukažte, že není spojitá v bodě $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 1 \\ (x - 2)^2 & x > 1 \end{cases}$$

3. Pro následující funkce určete jejich definiční obory, načrtněte grafy a zjistěte, zda je lze spojitě rozšířit.

$$x \mapsto \frac{x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$$

$$x \mapsto \frac{x^3 - 2x + 4}{x + 2}$$

$$x \mapsto \frac{x}{3 - \sqrt{x + 9}}$$

4. Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)^3(x^2 - 3x + 2)}{(x - 2)^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x + 5} - 2)^6}{(x^3 + x^2 - x - 1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 2}$$

5. Ukažte pomocí definice limity, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/x = 0$.
6. Ukažte pomocí definice limity, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$.
7. Vypočtěte limity funkce v bodech $\pm\infty$.

$$x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

8. Vypočtete jednostranné limity funkce f v bodech -1 , 1 a 2 . Má funkce f v těchto bodech oboustrannou limitu?

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{x^3 - 3x - 2}$$

9. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit.

$$f : x \mapsto \frac{(x + 3)(-2 + \sqrt{x + 2})^2}{(x^2 - 4x + 4)(1 + \sqrt{x^2 - 1})}$$

10. Načrtněte graf funkce f .

Nejdříve načrtněte graf lineární funkce $x \mapsto x/2 - 1/2$ a k náčrtku grafu funkce f použijte limity funkce $x \mapsto -1/(x + 1)$.

$$f : x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x + 1}$$

11. Určete obraz intervalu $[0, 3]$ ve funkci $f : x \mapsto 1 + 2x - x^2$.
12. Řešte nerovnice, které jsme řešili na začátku semestru. Tentokrát použijte k řešení nerovnic větu o kořeni spojitě funkce.
- (a) $\sqrt{x^2 + 5} \leq x + 1$
 - (b) $\sqrt{7 - 3x} > x - 1$