Úlohy z posloupností

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
17. října 2018

1. Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{7}{a_n^2}\right), \quad a_1 = 1.$$
   (a) Vyčíslete prvních 10 členů posloupnosti.
   (b) Ukažte, že pro prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ platí $a_n^3 \geq 7$.
   (c) Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající.
   (d) Vypočtěte limitu této posloupnosti.

2. Ukažte, že geometrická posloupnost s kvocientem q a prvním členem a_1 má n-tý člen $a_n = a_1 q^{n-1}$).

3. Nalezněte $k \in \mathbb{R}$ (stačí jedno) takové, že
$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(n > k \Rightarrow \frac{1}{n} < 0.003\right).$$

4. Nalezněte $k \in \mathbb{R}$ (stačí jedno), pro které platí
$$(\forall n \in \mathbb{R})\,(n > k \Rightarrow 0.7^n < 0.1)\,.$$

5. Vypočtete limity posloupností. Své výpočty podrobně zdůvodňujte – uveďte, kterou základní limitu použijete a dále uvádějte, které věty o limitách posloupností používáte.
$$\left\{\frac{n^2 - n + 2}{2 - 3n^2}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^4}{n^9}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^4}{n^8}\right\}.$$

6. Vypočtete limity posloupností
$$\left\{\frac{(2n^3+1)^2 - 4(1-n)^6}{n^5 - 3n^4 + 2n + 12}\right\}, \quad \left\{\frac{(2n^2+1)^3}{n^7+1}\right\}, \quad \left\{\frac{(2n^2+n+1)^5}{(1-n)^{10}}\right\}$$

7. Určete pro jaké $k \in \mathbb{N}$ jsou následující posloupnosti konvergentní
$$\left\{\frac{n^k}{(n^3-6)^4}\right\}, \quad \left\{\frac{(n^2+1)^3 - (n^3+1)^2}{n^k}\right\}, \quad \left\{\frac{(n-2)^5 - n^5 + 10n^4}{n^k}\right\}.$$

8. Vypočtěte limity posloupností

$$\left\{\sqrt{\frac{(2n^2+1)^3(3-n)^2}{n^8}}\right\}, \quad \left\{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{3n}\right\}, \quad \left\{n-\sqrt{n^2+n}\right\}$$

9. Vypočtěte limitu posloupnosti

$$\left\{\frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{2^n+3^n}\right\}$$

10. Vyčíslete takové množství členů posloupnosti, které vám umožní odhadnout hodnotu její limity

$$\left\{\frac{n^5+2^n}{n+2^{n+2}}\right\}$$

Dokážete výsledek zobecnit pro limity typu ($k, l \in \mathbb{N}$, $a, b \in (1, +\infty)$)?

$$\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \left\{\frac{n^k+a^n}{n^l+b^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

11. Nalezněte $k \in \mathbb{R}$ (stačí jedno), pro které platí

$$(\forall n \in \mathbb{R})\,(n > k \Rightarrow 1.6^n > 20)\,.$$

12. Vypočtěte limity posloupností

(a)

$$\left\{\frac{\sqrt{n^4+n-1}+2n}{n+2}\right\}$$

(b)

$$\left\{\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{2n^2+n+1}\right\}$$

(c)

$$\left\{\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n^2+n+1}\right\}$$