Úlohy z funkcí – spojitost, limity

1. Vypočtěte limity

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+5x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^3(x^2-3x+2)}{(x-2)^4}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)^6}{(x^3+x^2-x-1)^3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

2. Vypočtěte limity funkcí v bodech $\pm\infty$.

$$x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3x-2}}$$

$$x \mapsto x^2-\sqrt{x^4-3x^2+4x+1}$$

$$x \mapsto x^2-\sqrt{x^4-x^3+4}$$

3. Vypočtěte jednostranné limity funkce f v bodech -1, 1 a 2. Má funkce f v těchto bodech oboustrannou limitu?

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x^3-3x-2}$$

4. Pro následující funkce určete jejich definiční obory, načrtněte grafy a zjistěte, zda je lze spojitě rozšířit.

$$x \mapsto \frac{x+3}{2x^2+5x-3}$$

$$x \mapsto \frac{x^3-2x+4}{x+2}$$

$$x \mapsto \frac{x}{3-\sqrt{x+9}}$$

5. Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit a případně jakou hodnotou.

$$f : x \mapsto \frac{(x^2-9)(-2+\sqrt{x+2})}{(x^2-5x+6)(1+\sqrt{x^2-1})}$$

6. Načrtněte graf funkce f.

   Nejdříve načrtněte graf lineární funkce $x \mapsto x/2 - 1/2$ a k náčrtku grafu funkce f použijte limity funkce $x \mapsto -1/(x+1)$.

$$f : x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}$$

7. Načrtněte graf funkce f a ukažte, že není spojitá v bodě $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 1 \\ (x-2)^2 & x > 1 \end{cases}$$

   Tj. zvolte vhodně $\varepsilon > 0$ a ukažte, že neexistuje $\delta > 0$ splňující $x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(1)-\varepsilon, f(1)+\varepsilon)$.

8. Načrtněte graf kvadratické funkce (např. $f(x) = x^2 - 4x + 2$), zvolte bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (např. $x_0 = 1$), zvolte $\varepsilon > 0$ (např. $\varepsilon = 0.6$) a na ose y vyznačte okolí $B_\varepsilon(f(x_0))$. Na ose x pak vyznačte okolí $B_\delta(x_0)$ takové, že pro $x \in B_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.

9. Ukažte pomocí definice limity, že $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$.

   Tj. k $\varepsilon > 0$ nalezněte $m \in \mathbb{R}$ splňující $x > m \Rightarrow 1/x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

10. Ukažte pomocí definice limity, že $\lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$.

    Tj. k $m \in \mathbb{R}$ nalezněte $\delta > 0$ splňující $x \in (0, \delta) \Rightarrow 1/x > m$.

11. Ukažte pomocí definice limity, že $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$.

    Tj. k $m_1 \in \mathbb{R}$ nalezněte $m_2 \in \mathbb{R}$ splňující $x < m_2 \Rightarrow 1/x < m_1$.

12. Ukažte pomocí definice limity, že $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$.

    Tj. k $\varepsilon > 0$ nalezněte $\delta > 0$ splňující $x \in (0, \delta) \Rightarrow \sqrt{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.