MONOTONIE

ÚLOHA
Suchardová!

4) MONOTONIE SE MŮŽE MĚNIT V BODECH, KDE JE DERIVACE FUNKCE NULOVÁ, NEBO V BODECH, KDE DERIVACE FUNKCE NEEXISTUJE, ~~NEBO V BODECH, KDE NENÍ FUNKCE DEFINOVANÁ~~

Co to znamená? Mění se z rostoucí na klesající?

POKUD JE DERIVACE FUNKCE NA INTERVALU KLADNÁ (RESP. ZÁPORNÁ) A FUNKCE JE SPOJITÁ, JE FUNKCE ROSTOUCÍ (RESP. KLESAJÍCÍ)

OK

nebo z monotonní na nemonotonní?

a) $f: x \to x^3 + x^2 - 6x$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 6$

$D(f) = D(f')$ → DERIVACE FUNKCE JE DEFINOVANÁ NA CELÉM DEFINIČNÍM OBORU FUNKCE, MONOTONIE SE MŮŽE MĚNIT POUZE V BODECH, KDE $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 = 3x^2 + 2x - 6$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12 \cdot 6}}{6}$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 18}}{6}$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{19}}{3}$

$\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$ $\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$

$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

FUNKCE JE: ROSTOUCÍ $x \in \left(-\infty; -\frac{1-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$

KLESAJÍCÍ $x \in \left\langle \frac{-1-\sqrt{19}}{3}; \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \right)$

Tohle je ok, používejte

b) $f: x \mapsto |x+2| - x^2$

FUNKCI SI ROZDĚLÍM NA INTERVALY, VE KTERÝCH JE ~~HODNOTA~~ ARGUMENT ABSOLUTNÍ HODNOTY: 1) KLADNÁ 2) ZÁPORNÁ 3) NULOVÁ

Hodnota nemůže být

1) $(-\infty; -2)$

$f'(x) = (-x - 2 - x^2)'$

$f'(x) = -2x - 1$ (definována na intervalu $(-\infty; -2)$)

~~derivace existuje~~ řeším pouze $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 = -2x - 1$

$x = -\frac{1}{2}$ nenáleží intervalu

$x \in \emptyset$

2) $(-2; +\infty)$

$f'(x) = (x + 2 - x^2)'$

$f'(x) = -2x + 1$ (definována na intervalu $(-2; +\infty)$)

$f'(x) = 0 = -2x + 1$

$x = \frac{1}{2}$

3) DERIVACI V BODĚ $x = -2$ ŘEŠÍM PŘES DEFINICI DERIVACE POMOCÍ LIMITY. DERIVACE V TOMTO BODĚ EXISTUJE, POKUD $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. A JEJÍ HODNOTA JE STEJNÁ JAKO HODNOTA LIMITY.

Je potřeba řešit nerovnice $f'(x) > 0$

$f'(x) < 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|-2+h+2|-(-2+h)^2+4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-(h^2-4h+4)+4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}(-h+5)}{\cancel{h}} = 5$$

za x dosadím -2

h je kladné
-> odstraním absolutní hodnoty bez změny znaménka

nyní je funkce spojitá a mohu dosadit h = 0

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h+3) = 3$$

h je záporné
-> po odstranění abs. absolutní hodnoty musím změnit znaménko

funkce je již nyní spojitá, dosadím h = 0

LIMITY SE NEROVNAJÍ, A TEDY ZDE DERIVACE NEEXISTUJE (= MŮŽE ZDE FUNKCE PŘECHÁZET Z ROSTOUCÍ NA KLESAJÍCÍ A NAOPAK)

$$-2 \qquad \frac{1}{2}$$

$>0 \qquad f'(x)>0 \qquad f'(x)<0$

← Jak jste na to přišla? (načrtnutí jsem tu jen neviděla – máte to někde?)

FUNKCE JE ROSTOUCÍ $x \in (-\infty;-2\rangle \cup \langle -2;\frac{1}{2}\rangle$

KLESAJÍCÍ $x \in \langle \frac{1}{2};+\infty)$

Proč je to zjednodušení?

DRUHÝ ZPŮSOB:

$$(|x+2|-x^2)' = \left(\sqrt{(x+2)^2}-x^2\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left((x+2)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(x+2)\cdot 1 - 2x = \frac{2(x+2)}{2|x+2|} - 2x = \frac{(x+2)}{|x+2|} - 2x = \frac{x+2-2x|x+2|}{|x+2|}$$

$D(f') = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ← zde není derivace definovaná, může se měnit funkce z rostoucí na klesající a naopak

takto, ale nestačí odvod, že $f'(-2)$ neexistuje (pokud to takto chcete napsat, potřebujete limity)

ale z 1. způsobu výpočtu víte, že v -2 derivace neexistuje

$f'(x)=0$

$x+2-2x|x+2|=0$

N.B. -2

$$\underbrace{f'(x)>0 \quad -2 \quad f'(x)>0 \quad \frac{1}{2} \quad f'(x)<0}_{\text{PRO OBA POSTUPY JIŽ STEJNÉ}}$$

$|x+2| \quad \ominus \quad -2 \quad \oplus$

$(-\infty,-2)$

$-x-2-x^2$ … $+2+2x^2+4x=0$

$x^2+5x+2=0$

$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4} \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{matrix} \right\} \notin (-\infty;-2)$

$(-2;+\infty) \rightarrow x+2-2x^2-4x=0$

$-2x^2-3x+2=0$

$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{-4} \left\langle \begin{matrix} -2 \notin (-2;+\infty) \\ \frac{1}{2} \text{ jediný bod, kdy } f'(x)=0 \end{matrix} \right.$