Definice spojitosti

Definice spojitosti

Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě x_0, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Definice spojitosti

Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě x_0, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme význam výroku bez prvních dvou kvantifikátorů, tedy, co pro pevné ε, δ znamená výrok

$$(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Definice spojitosti

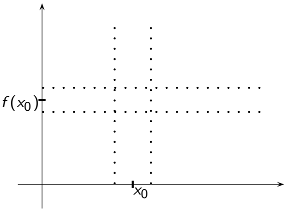
Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě x_0, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme význam výroku bez prvních dvou kvantifikátorů, tedy, co pro pevné ε, δ znamená výrok

$$(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Na osách jsou vyznačena okolí $U_\delta(x_0)$, $U_\varepsilon(f(x_0))$.



Definice spojitosti

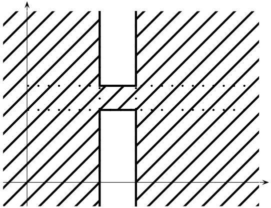
Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě x_0, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Na obrázku ukážeme význam výroku bez prvních dvou kvantifikátorů, tedy, co pro pevné ε, δ znamená výrok

$$(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

A k nim je vyšrafovaná část roviny, v níž může ležet graf funkce splňující výše uvedenou implikaci.



Definice spojitosti

Poznámky

Uvedeme, jak rozumíme výroku $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ v případě, že x (nebo x_0) neleží v definičním oboru funkce f, a tedy $f(x)$ (nebo $f(x_0)$) není definované – výrok v tom případě považujeme za neplatný.

Definice spojitosti

Poznámky

Uvedeme, jak rozumíme výroku $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ v případě, že x (nebo x_0) neleží v definičním oboru funkce f, a tedy $f(x)$ (nebo $f(x_0)$) není definované – výrok v tom případě považujeme za neplatný.

Dále si rozmyslete, že výrok s implikací

$$(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

je ekvivalentní s výrokem

$$(\forall x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Definice spojitosti

Poznámky

Uvedeme, jak rozumíme výroku $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ v případě, že x (nebo x_0) neleží v definičním oboru funkce f, a tedy $f(x)$ (nebo $f(x_0)$) není definované – výrok v tom případě považujeme za neplatný.

Dále si rozmyslete, že výrok s implikací

$$(\forall x)(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

je ekvivalentní s výrokem

$$(\forall x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Definici spojitosti můžeme zapsat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

a také to tak někdy budeme dělat.

Definice spojitosti

Poznámky

Uvedeme, jak rozumíme výroku $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ v případě, že x (nebo x_0) neleží v definičním oboru funkce f, a tedy $f(x)$ (nebo $f(x_0)$) není definované – výrok v tom případě považujeme za neplatný.

Dále si rozmyslete, že výrok s implikací

$$(\forall x)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

je ekvivalentní s výrokem

$$(\forall x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Definici spojitosti můžeme zapsat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

a také to tak někdy budeme dělat. Je potřeba, aby studenti chápali, že uvedené výroky jsou ekvivalentní.

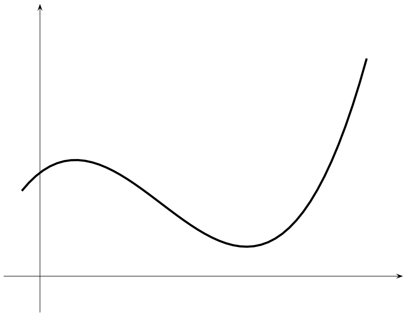
Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

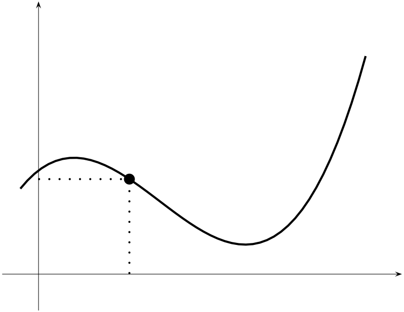
Na obrázku je graf funkce f.



Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

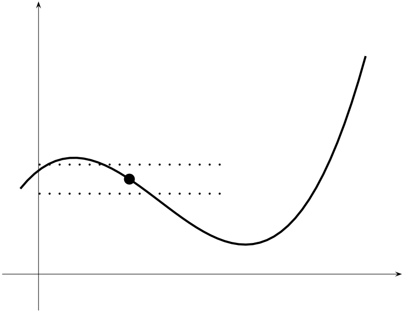
Na grafu funkce je zakreslen bod $[x_0, f(x_0)]$.



Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

Na svislé ose je zakresleno okolí $U(f(x_0))$ funkční hodnoty $f(x_0)$.

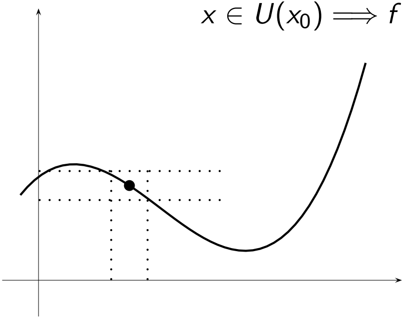


Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

Na svislé ose je zakresleno okolí $U(f(x_0))$ funkční hodnoty $f(x_0)$. A na vodorovné ose je zakresleno okolí $U(x_0)$ bodu x_0 splňující

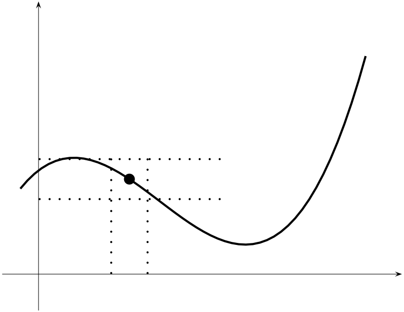
$$x \in U(x_0) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0))$$



Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

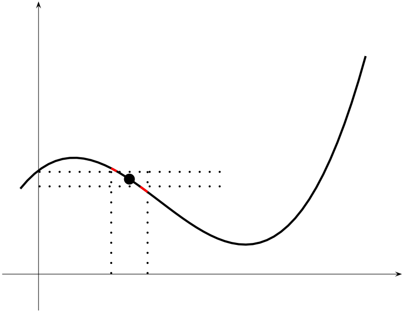
Při zvětšení okolí funkční hodnoty můžeme nechat stejné okolí bodu x_0 a implikace bude stále platit.



Spojitá funkce

Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

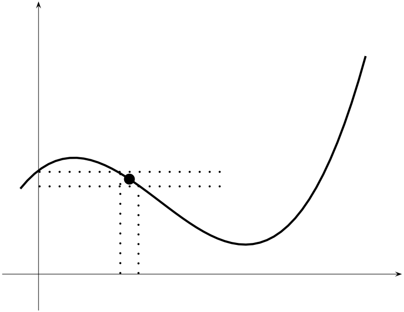
Při zmenšení okolí funkční hodnoty se může stát, že implikace přestane platit. Viz červené části grafu.



Spojitá funkce

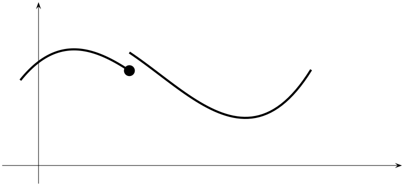
Vysvětlíme definici spojitosti na grafu spojité funkce a na dalším slajdu na grafu nespojité funkce.

Při zmenšení okolí funkční hodnoty se může stát, že implikace přestane platit. V tom případě okolí bodu x_0 zmenšíme a implikace platit bude.



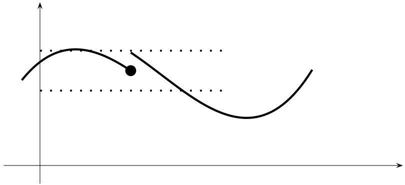
Nespojitá funkce

Na obrázku je graf funkce f.



Nespojitá funkce

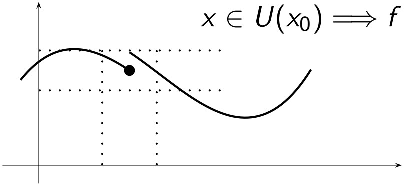
Na svislé ose je zakresleno okolí $U(f(x_0))$ funkční hodnoty.



Nespojitá funkce

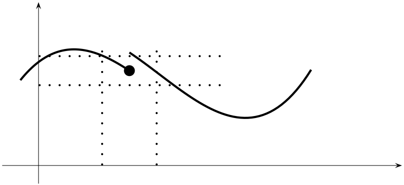
Na svislé ose je zakresleno okolí $U(f(x_0))$ funkční hodnoty.
A k němu je zakresleno okolí $U(x_0)$ splňující

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0))$$



Nespojitá funkce

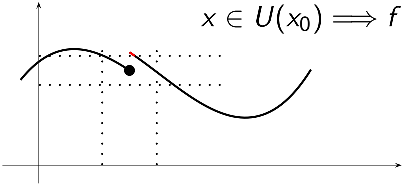
Zmenšíme-li nyní okolí $U(f(x_0))$,



Nespojitá funkce

Zmenšíme-li nyní okolí $U(f(x_0))$, není možné zvolit okolí bodu x_0 tak, aby platila implikace (viz červená část grafu funkce)

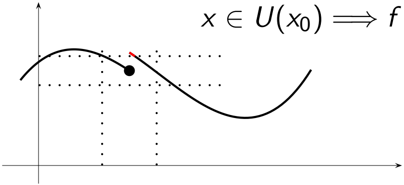
$$x \in U(x_0) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0))$$



Nespojitá funkce

Zmenšíme-li nyní okolí $U(f(x_0))$, není možné zvolit okolí bodu x_0 tak, aby platila implikace (viz červená část grafu funkce)

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0))$$



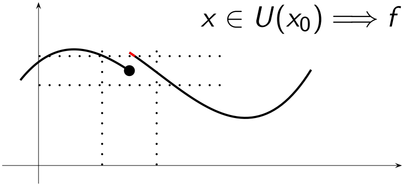
Našli jsme tedy $\varepsilon > 0$, pro něž platí

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in U_\delta(x_0))(f(x) \notin U(f(x_0)))$$

Nespojitá funkce

Zmenšíme-li nyní okolí $U(f(x_0))$, není možné zvolit okolí bodu x_0 tak, aby platila implikace (viz červená část grafu funkce)

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0))$$



Našli jsme tedy $\varepsilon > 0$, pro něž platí

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in U_\delta(x_0))(f(x) \notin U(f(x_0)))$$

A proto neplatí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) \in U(f(x_0)))$$

A funkce tedy není v bodě x_0 spojitá.