Matematická analýza pro učitele
(text je v pracovní verzi)

Martina Šimůnková

12. prosince 2019

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V textu se budeme zabývat *funkcemi* jedné reálné proměnné. V této úvodní kapitole vyložíme, co to funkce je, a nastíníme, co všechno nás na funkcích bude zajímat.

1.1 Co je to funkce

Historicky byla funkce předpis, např. $f(x) = x^2$. Dnes pod pojmem funkce rozumíme závislost mezi dvěma proměnnými, která může, ale nemusí být dána jedním předpisem. Tyto stručné historické poznámky čerpáme z [2], 4.4.7, zvídavý čtenář tam najde další podrobnosti.

Funkce zadané (jedním) předpisem nazýváme *elementármími funkcemi*. Zkoumání těchto funkcí bude jedním z našich cílů, ale nikoliv jediným.

Příkladem funkcí zadaných jinak než jedním předpisem jsou funkce f, g,[1]

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x/2 & x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

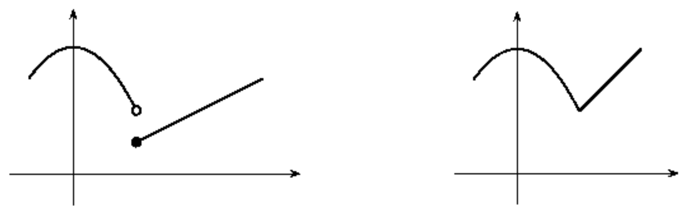
Dirichletova funkce δ

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nebo funkce zadané empiricky jako například průběh teploty naměřené meteorologickou stanicí v závislosti na čase.

[1]Zápis (1.1) čteme: funkce f přiřadí číslu x menšímu než jedna číslo $2 - x^2$ a číslu x většímu nebo rovnému jedné číslo…

Důležitým pojmem je *graf funkce*. Na obrázku jsou grafy funkcí z (1.1), vlevo funkce f, vpravo g.



Grafem Dirichletovy funkce jsou dvě „řídké“ přímky.

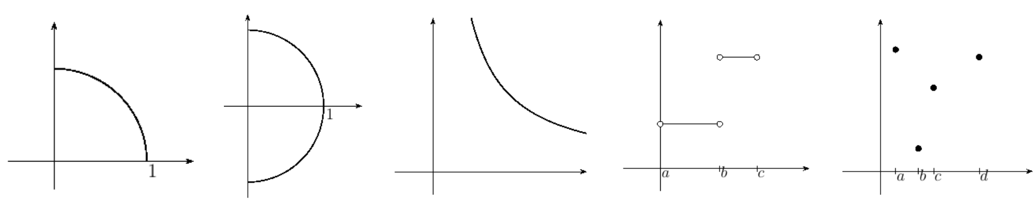
Někdy se funkce definuje primárně jako její graf, tedy množina dvojic reálných čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ taková, že k číslu x leží na tomto grafu maximálně jeden bod $[x, y]$. Jinak řečeno, leží-li body $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ na grafu funkce, musí platit $y_1 = y_2$. Formálně zapsáno $G \subset \mathbb{R}^2$ je grafem funkce, pokud platí

$$(\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R})(([x, y_1] \in G \wedge [x, y_2] \in G) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Čteme: pro každou trojici reálných čísel x, y_1, y_2 z platnosti $[x, y_1] \in G$, $[x, y_2] \in G$ plyne $y_1 = y_2$. Rozmyslete si, že významově stejné je tvrzení: pro každou trojici reálných čísel x, y_1, y_2 splňující $[x, y_1] \in G$, $[x, y_2] \in G$ platí $y_1 = y_2$.[2]

Teprve z grafu funkce je poté odvozen předpis a definiční obor funkce. Číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřadíme číslo y splňující $[x, y] \in G$. Definičním oborem je množina čísel x, pro něž existuje číslo y takové, že $[x, y] \in G$.

Vysvětlíme na následujících grafech.



Budeme procházet obrázky zleva doprava.

1. Na obrázku je čtvrtkružnice, která je grafem funkce s definičním oborem $[0, 1]$ a předpisem $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

[2] O výrocích, kvantifikátorech, jejich čtení a významu více pojednáme v jedné z následujících kapitol.

2. Půlkružnice na obrázku není grafem funkce. Její rovnice je $x^2 + y^2 = 1$, $x \in [0,1]$. Pro $x \in [0,1)$ obsahuje dva různé body $[x, \sqrt{1-x^2}]$, $[x, -\sqrt{1-x^2}]$.

3. Na obrázku je část větve hyperboly. Je grafem funkce, ale určit pouhým pohledem z grafu její definiční obor a předpis není jednoduché, protože není možné hyperbolu nakreslit celou. Doplníme-li, že souřadné osy jsou jejími asymptotami, můžeme určit definiční obor: $(0, +\infty)$. O funkčním předpisu víme, že je $x \mapsto k/x$, kde konstantu k nelze určit z grafu bez měřítka.[3]

4. Na obrázku je graf po částech konstantní funkce s definičním oborem $(a,b) \cup (b,c)$. Jiným způsobem můžeme tento obor zapsat $(a,c) \setminus \{b\}$.[4]

5. Na obrázku tvoří graf funkce čtyři body. Definiční obor funkce je čtyřprvková množina $\{a,b,c,d\}$.

Výše mluvíme o funkci jako vztahu dvou proměnných. Jednu z proměnných zpravidla označujeme x a nazýváme ji *argumentem* funkce, *proměnnou* funkce, *vzorem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla nezávisle proměnnou. Druhou proměnnou zpravidla označujeme y nebo $f(x)$ (pro funkci pojmenovanou f) a nazýváme ji *funkční hodnotou*, *obrazem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla závisle proměnnou. Pokud mají proměnné nějaký význam, třeba geometrický (délka, obsah, souřadnice, ...) nebo fyzikální (čas, rychlost, síla, teplota, ...), často použijeme místo x, y značení dané veličině odpovídající. Například označíme čas t, vzdálenost s a $s = 1/2gt^2$ je závislost dráhy na čase při pohybu v gravitačním poli intenzity g. Nebo označíme délku hrany krychle a, objem krychle V a $V = a^3$ je závislost objemu na délce hrany.

Pojmy (termíny) *vzor* a *obraz* znáte z geometrie při zobrazování (posunutí, otočení, zrcadlení). Funkce je speciálním typem zobrazení, kde vzory a obrazy jsou čísla.

Úkol. Uveďte další příklady funkcí jak elementárních, tak ostatních. Nejlépe takové, které popisují závislost fyzikálních, geometrických, případně jiných

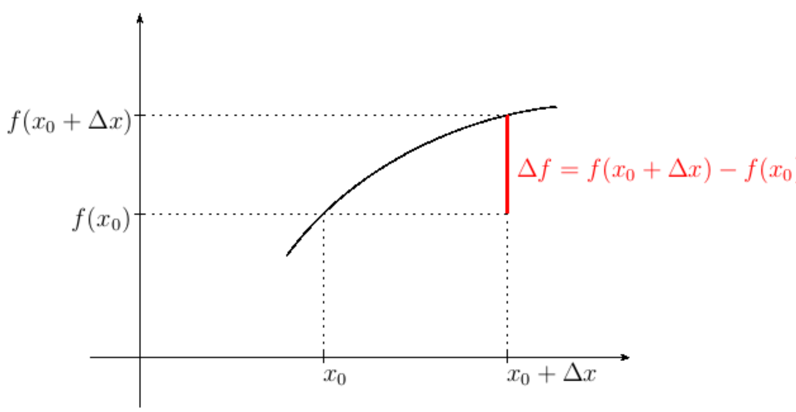
[3] Z grafu určíme jen znaménko k. Pro hyperbolu v prvním kvadrantu je $k > 0$.

[4] První způsob je sjednocení dvou otevřených intervalů, druhý je rozdíl intervalu a jednoprvkové množiny. Více o množinách, operacích s nimi a způsobech zápisu v některé z dalších kapitol.

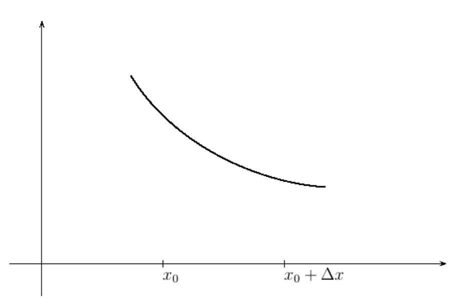
„reálných“ veličin. Dále uveďte příklady množin $G \subset \mathbb{R}^2$ a určete, zda jsou grafem funkce a případně určete definiční obor a předpis funkce.

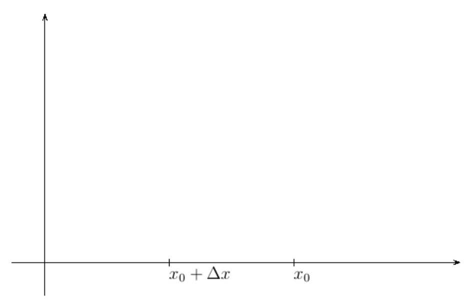
1.2 Co budeme na funkcích zkoumat

Bude nás zajímat, jak se mění funkční hodnota při změně proměnné – tyto změny zpravidla znázorňujeme na grafu funkce a používáme k tomu níže uvedenou terminologii.



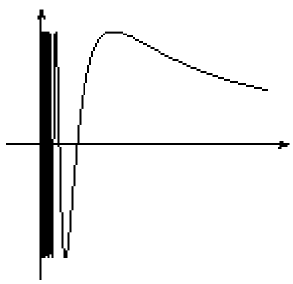
Číslo Δx budeme nazývat *přírůstkem proměnné* x, číslo Δf *přírůstkem funkce* (přesnější by asi bylo říkat přírůstek funkční hodnoty, ale moc se to nepoužívá). Následující obrázky ukazují situaci, kdy je přírůstek funkce, případně přírůstek proměnné záporný.

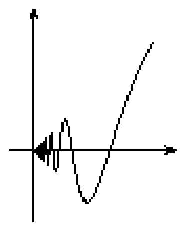




1.3 Spojitost funkce

V případě, že pro „malé“ hodnoty Δx je přírůstek funkce Δf „malý“, budeme říkat, že je funkce f *spojitá v bodě* x_0. Úvozovkami chceme zdůraznit značnou vágnost tohoto popisu. Pojem spojitosti se vyvíjel, podle poznámek 4.4.7 zmíněných výše byly kdysi obě funkce f, g uvedené v (1.1) považovány za nespojité[5] v bodě $x = 1$, protože se v tomto bodě mění funkční předpis. Podle současné definice spojitosti není funkce f v bodě $x = 1$ spojitá zatímco funkce g ano. Přesná definice pojmu spojitosti je poměrně obtížná a uvedeme ji později. K jejímu bližšímu objasnění uvedeme ještě několik příkladů.





Na levém obrázku je graf funkce

$$f(x) = \sin(1/x),$$

na pravém

$$g(x) = x\sin(1/x).$$

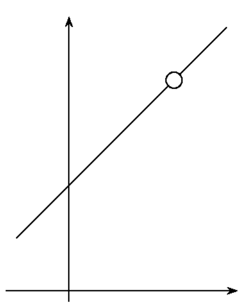
Obě funkce mají kořeny v bodech $1/x = k\pi$, tedy $x = 1/(k\pi)$, a tedy v okolí nuly je kořenů nahuštěno nekonečně mnoho. V bodě $x = 0$ tyto funkce nejsou definované. Pokud chceme, můžeme je v tomto bodě dodefinovat. Vzniknou tím nové funkce, které označíme $\hat{f}$, $\hat{g}$.

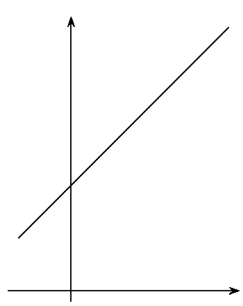
$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \hat{g}(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Říkáme, že funkce $\hat{f}$ je *rozšířením funkce* f, funkce $\hat{g}$ je rozšířením funkce g.

Protože pro hodnoty x „blízké“ nule jsou hodnoty $\hat{g}(x)$ „blízké“ $\hat{g}(0)$, je funkce $\hat{g}$ spojitá v bodě nula a mluvíme o *spojitém rozšíření*. Funkce $\hat{f}$ je rozšířením funkce f, ale není jejím spojitým rozšířením.

Na následujících obrázcích je další příklad spojitého rozšíření, kdy definiční obor výrazu zvětšíme pokrácením.





Na obrázku vlevo je graf funkce

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a vpravo graf funkce

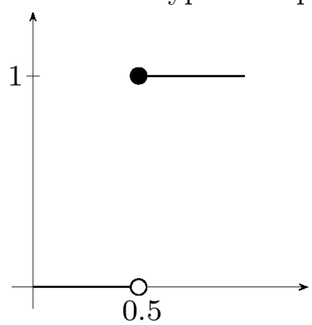
$$\hat{h}(x) = x + 1.$$

[5]Říkáme-li, že je funkce v bodě nespojitá, máme na mysli, že není spojitá. Toto není zcela samozřejmé, například rostoucí a nerostoucí funkce nejsou v tomto smyslu doplňkové pojmy.

K pojmu spojitosti zatím uvedeme, že elementární funkce (tedy funkce zadané jedním funkčním předpisem, které znáte ze střední školy) jsou na svých definičních oborech spojité.

Pokud funkce není v bodě x_0 spojitá, ale lze ji v tomto bodě spojitě rozšířit, říkáme, že má funkce v bodě x_0 *odstranitelnou nespojitost.* Příkladem odstranitelných nespojitostí je nespojitost funkce g v bodě $x = 0$ a nespojitost funkce h v bodě $x = 1$.

Dalším typem nespojitosti je *nespojitost typu skoku.*



Uvažujme funkci, která číslu x přiřadí číslo, které z čísla x vznikne zaokrouhlením na celé číslo. Tato funkce není spojitá v bodě $x = 0.5$.
Čísla $x \in (0, 0.5)$ zaokrouhlíme na nulu, zatímco čísla $x \in (0.5, 1)$ zaokrouhlíme na jedničku. Funkční hodnota tedy při „přechodu“ přes $x = 0.5$ „skočí“ o jedna.

Příkladem funkce, která není spojitá a tato nespojitost není odstranitelnou nespojitostí ani nespojitostí typu skoku, jsou funkce f a $\hat{f}$.

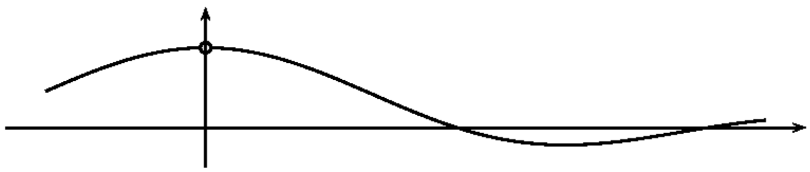
1.4 Limita funkce

S pojmem spojitosti úzce souvisí pojem limita. Například funkce $h : x \mapsto (x^2 - 1)/(x - 1)$ zmiňovaná výše není definovaná v bodě $x = 1$, ale má v tomto bodě limitu rovnu $\hat{h}(1) = 2$. Zjednodušeně to znamená, že pro x blízké jedné je $h(x)$ blízké dvěma.

Dalším příkladem funkce mající limitu je výše zmiňovaná funkce $g : x \mapsto x \sin(1/x)$. V bodě nula má limitu rovnu nule.

Příklad funkce nemající limitu je $f : x \mapsto \sin(1/x)$ v bodě nula. Vysvětlíme proč: pro velká $k \in \mathbb{N}$ jsou obě $x_+ = 1/(\pi/2 + 2k\pi)$ a $x_- = 1/(-\pi/2 + 2k\pi)$ „hodně blízko“ nule a zároveň je $f(x_+) = \sin(1/x_+) = 1$ a $f(x_-) = \sin(1/x_-) = -1$. Neexistuje tedy žádné reálné číslo, kterému by byly hodnoty $f(x)$ „blízké“ pro „všechna x blízká“ nule.

Na následujícím obrázku je graf funkce $x \mapsto (\sin x)/x$. V nule není funkce definovaná, ale z obrázku je vidět, že má v nule limitu. Hodnota limity závisí na jednotkách, které zvolíme pro výpočet sinu. Oblouková míra (radiány) se vyznačuje tím, že hodnota této limity je rovna jedné. V některé z dalších kapitol tuto skutečnost ukážeme. Připomeneme si přitom, jak je oblouková míra definovaná.

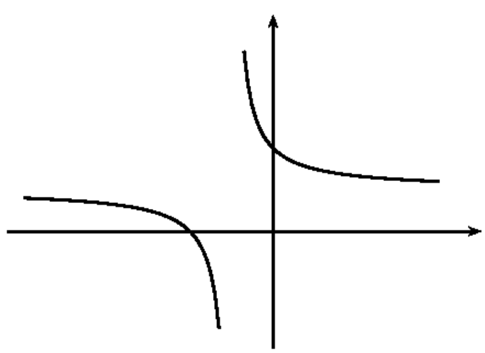


1.4.1 Nevlastní limity, jednostranné limity

Výše uvedené limity popisují chování funkce v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, a to takové chování, kdy funkční hodnoty jsou blízké hodnotě $L \in \mathbb{R}$ pro x blízké x_0. Číslo L nazýváme limitou funkce v bodě x_0.

Pojem limita funkce zahrnuje i případy, kdy některé z čísel x_0, L, nebo případně obě, jsou nekonečné. Vysvětlíme na funkci f a jejím grafu.

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$$



Pro x velké kladné je funkční hodnota blízká jedné polovině. Říkáme, že má funkce f v bodě $+\infty$ limitu rovnu $1/2$ a o limitě mluvíme jako o vlastní limitě v nevlastním bodě.

Předpona ne ve slově nevlastní označuje nekonečnou hodnotu.

Podobně je limita funkce f v bodě $-\infty$ rovna $1/2$.

Úkol. Zodpovězte otázky: Jak se jmenuje křivka, která je grafem funkce f? Jaký má tato křivka vztah k přímce o rovnici $y = 1/2$? A jak vztah křivky a přímky souvisí s nevlastními limitami, o kterých se píše výše?

Nevíte-li si rady, tak načrtněte graf funkce f, popište osy, dokreslete na ně měřítko a načrtněte i přímku o rovnici $y = 1/2$.

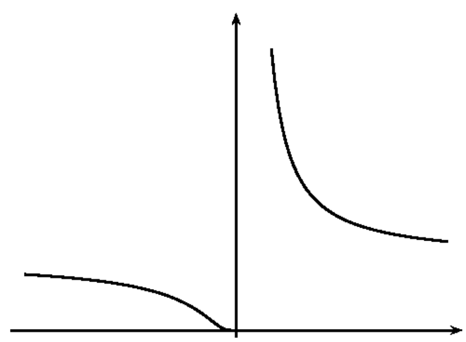
V bodě $x = -1/2$ není funkce f definovaná a v jeho okolí nabývá velkých hodnot. Pro x o trochu větší než $1/2$ jsou funkční hodnoty velké kladné –

říkáme, že má funkce v bodě $x = -1/2$ zprava limitu rovnu $+\infty$ a mluvíme o nevlastní limitě ve vlastním bodě.

Podobně: v bodě $x = -1/2$ zleva má funkce limitu rovnu $-\infty$.

Úkol. Zodpovězte stejné otázky jako výše pro přímku o rovnici $x = -1/2$.

Ještě jeden graf a příklad: $x \mapsto 2^{1/x}$.



Limita v bodě $x = 0$ zleva je rovna nule, zprava je rovna $+\infty$.
Z grafu lze tušit i limity v bodech $\pm\infty$. V kapitole o limitách složené funkce si vysvětlíme, že jsou obě rovny jedné. Pokud se nad nimi chcete zamyslet už teď, tak si rozmyslete, jakých hodnot nabývá výraz $2^{1/x}$ pro x hodně velké kladné, případně hodně velké záporné.

Úkol. Jednostranné limity v nule jsme určili z grafu. Určete je bez grafu jen z vlastností (a grafů) funkcí $x \mapsto y = 1/x$, $y \mapsto 2^y$.

Dalším příkladem jednostranných limit je „zaokrouhlovací“ funkce z konce článku 1.4. Limita této funkce v bodě 0.5 zleva je rovna nule a zprava rovna jedné.

1.5 Aproximace funkcí

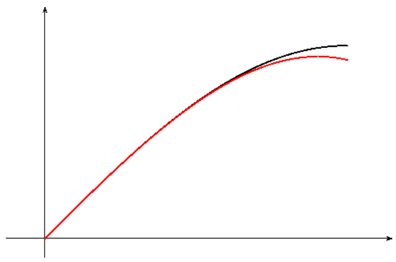
Někdy si potřebujeme práci s funkcemi zjednodušit, proto „složitou“ funkci nahradíme „jednodušší“ funkcí. Za toto nahrazení a zjednodušení zaplatíme menší přesností. Místo o nahrazení mluvíme většinou o *aproximaci*.

Za aproximující funkci často volíme lineární funkci, nebo, chceme-li aproximaci zpřesnit, polynom.

Aproximace může být lokální nebo globální.

1.5.1 Aproximace polynomem

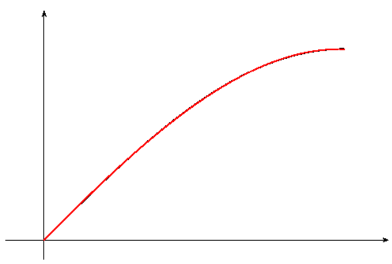
Ukážeme na grafu a na tabulce funkčních hodnot dvě různé aproximace funkce sinus polynomem třetího stupně.



Vlevo je černě graf funkce sinus na intervalu $[0, \pi/2]$ a červeně na stejném intervalu graf polynomu. Nazýváme ho Taylorův polynom a budeme se jím v některé z dalších kapitol zabývat.

$$T : x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$$

Na dalším obrázku je podobná situace, tentokrát s interpolačním[6] polynomem.



Grafy se téměř překrývají. Při zvětšení je vidět, jak černý graf přechází několikrát přes červený. Potvrdí se to v tabulce dole.[a]

$$I : x \mapsto -0.114x^3 - 0.066x^2 + 1.023x - 0.0011$$

[a]Koeficienty jsou zaokrouhlené. Rozdíly v tabulce jsou spočítané pro přesnější hodnoty koeficientů.

x	$\sin x$	$T(x)$	$I(x)$	$T(x) - \sin x$	$I(x) - \sin x$
0	0	0.000	-0.001	0	-10^{-3}
0.2	0.199	0.199	0.200	-3×10^{-6}	10^{-3}
0.4	0.389	0.389	0.390	-9×10^{-5}	6×10^{-4}
0.6	0.565	0.564	0.564	-6×10^{-4}	-8×10^{-4}
0.8	0.717	0.715	0.716	-3×10^{-3}	-10^{-3}
1	0.841	0.833	0.841	-8×10^{-3}	-6×10^{-4}
1.2	0.932	0.912	0.933	-2×10^{-2}	9×10^{-4}
1.4	0.985	0.943	0.987	-4×10^{-2}	10^{-3}

V tabulce je v prvním sloupci hodnota proměnné x, ve druhém její funkční hodnota $\sin x$, ve třetím je hodnota Taylorova polynomu $T(x)$, ve čtvrtém hodnoty interpolačního polynomu $I(x)$ a v pátém a šestém jsou hodnoty rozdílů $T(x) - \sin x$, $I(x) - \sin x$. Tyto rozdíly ukazují kvalitu aproximace. Vidíme, že aproximace Taylorovým polynomem je dobrá v okolí bodu nula a ve větší vzdálenosti od bodu nula se zhoršuje. Aproximace interpolačním polynomem je stejně dobrá v celém intervalu. Taylorův polynom proto někdy nazýváme *lokální aproximací* a interpolační polynom *globální aproximací.*

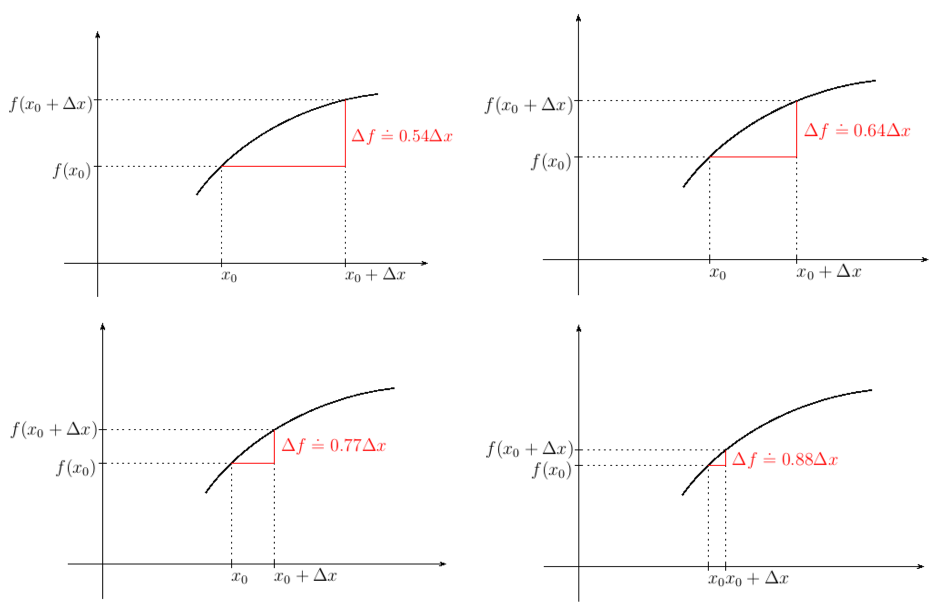
[6]Vybrali jsme čtyři body z intervalu $[0, \pi/2]$ a sestavili polynom mající stejnou funkční hodnotu jako aproximovaná funkce sinus. Více si zvídavý čtenář může přečíst například v [2], v tomto textu se interpolačnímu polynomu věnovat nebudeme.

V textu se budeme podrobněji zabývat lokální aproximací. Nejdříve budeme aproximovat lineární funkcí a ukážeme něco, co je intuitivně jasné, a sice, že nejlepší lineární aproximaci získáme pomocí tečny ke grafu funkce. Později přejdeme k aproximaci polynomem vyššího stupně než jedna.

Otázky. Zamysleli jste se někdy nad tím, jak kalkulačka počítá sinus? Pokud byste měli na výběr některý z interpolačních polynomů, přitom kvůli větší přesnosti bychom použili polynomy vyššího stupně, který byste použili? Šlo by oba polynomy zkombinovat? Jak byste je zkombinovali, aby byla přesnost a rychlost výpočtu[7] co nejlepší?

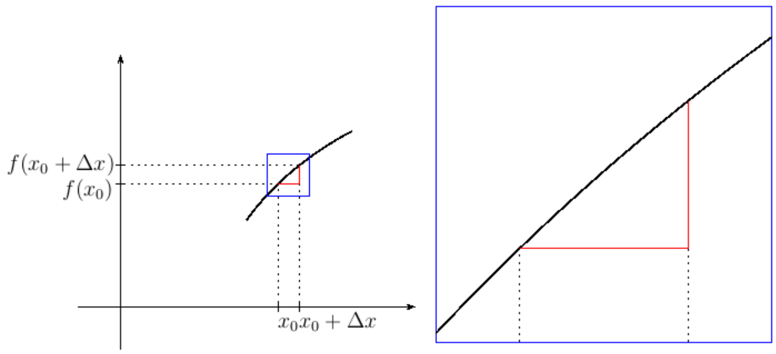
1.6 Derivace

Dalším pojmem je *derivace*, která „malé“ změny proměnných přesněji kvantifikuje. Podívejme se, co se děje s podílem přírůstků funkce a její proměnné $\Delta f/\Delta x$ při zmenšování Δx k nule. Vysvětlíme na funkci, jejímž grafem je oblouček, vezmeme tu z článku 1.2. Na obrázcích je kromě grafu funkce f a bodu x_0 na ose x zobrazen měnící se přírůstek Δx. Dále je na každém obrázku uveden podíl $\Delta f/\Delta x$ zaokrouhlený na setiny.



[7] Čím více členů polynom má, tím déle se počítá jeho funkční hodnota.

Na následujícím obrázku je zobrazen výřez z posledního grafu s nejmenší hodnotou Δx.



Vidíme, že se graf funkce ve výřezu mezi x_0 a $x_0 + \Delta x$ podobá úsečce. To se projeví tím, že se podíl $\Delta f/\Delta x$ málo mění při dalším zmenšování Δx.[8]

V tabulce jsou uvedeny podíly přírůstků v závislosti na přírůstku proměnné, za čarou i pro dále se zmenšující hodnotu přírůstku Δx.[9]

Δx	1.5	1.0	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$\Delta f/\Delta x$	0.54	0.64	0.77	0.88	0.92	0.94	0.95	0.96	0.96

Vidíme, že se hodnoty podílu „ustalují“ na 0.96. Podíl $\Delta f/\Delta x$ má pro Δx blížící se k nule limitu rovnu tomuto číslu. Tuto limitu nazýváme *derivací funkce v bodě* x_0.

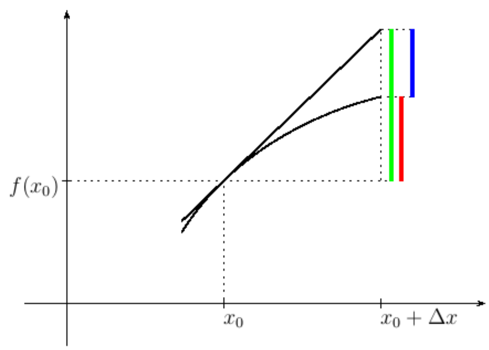
Přímku procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$, na které jsou přírůstky Δy, Δx přímo úměrné a derivace je konstanta této úměrnosti, budeme nazývat *tečnou ke grafu funkce v bodě* x_0.[10] Označíme-li derivaci v bodě x_0 symbolem D, má tato tečna rovnici

$$y = D(x - x_0) + f(x_0) \tag{1.3}$$

[8]Je-li grafem opravdu úsečka, je přírůstek Δf přímo úměrný přírůstku Δx a uvedený podíl je tedy konstantní. Pro podrobnosti odkazujeme na kapitolu 6, dodatek o přímé úměře.

[9]Pro případ, že by chtěl čtenář uvedenou tabulku přepočítat, mu prozradíme předpis funkce $\sqrt{6x - x^2 - 4} + 0.06(x-1)^2 - 0.5$ a bod $x_0 = 1.5$.

[10]Když mluvíme o chování funkce v bodě, například o tečně v bodě, máme na mysli bod na ose x charakterizovaný jedním reálným číslem. V grafu pak toto chování znázorňujeme zpravidla v bodě o dvou souřadnicích $[x, f(x)]$.



Na obrázku je graf funkce s tečnou a barevně vyznačenými přírůstky.

Červeně je vyznačen přírůstek funkce Δf.

Zeleně je vyznačen přírůstek na tečně, budeme ho značit $\mathrm{d}f$ a nazývat *linearní částí přírůstku funkce*.

Z podrobnosti trojúhelníků plyne pro proměnné Δx (tedy nejen to na obrázku nakreslené)

$$\mathrm{d}f/\Delta x = D.$$

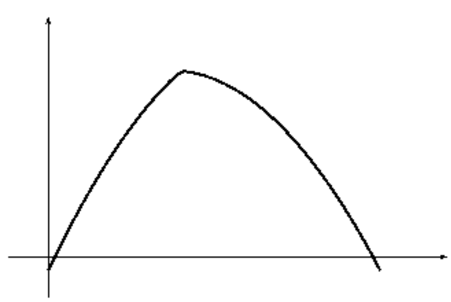
Modře je vyznačen rozdíl přírůstků $\mathrm{d}f - \Delta f$.

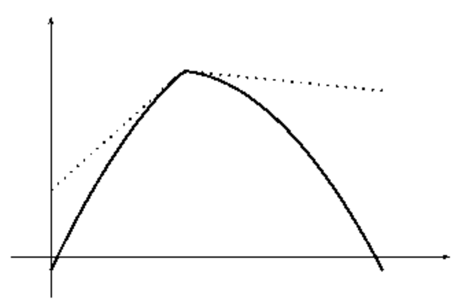
Výše jsme se zmiňovali, že tečna je grafem lokální aproximace funkce. Rozdíl $\mathrm{d}f - \Delta f$ je pak chybou takové aproximace. Ze vztahů $\mathrm{d}f/\Delta x = D$, $\Delta f/\Delta x \doteq D$ plyne

$$\frac{\mathrm{d}f - \Delta f}{\Delta x} \doteq 0. \tag{1.4}$$

V kapitole o derivaci tento vztah budeme interpretovat: chyba aproximace $\mathrm{d}f - \Delta f$ je pro malé hodnoty Δx ve srovnání s Δx zanedbatelná.

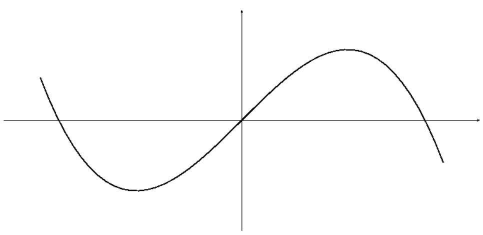
Uvedeme ještě několik příkladů. Na následujících obrázcích nás zajímá bod, v němž je graf „zlomený“. Podíl přírůstků $\Delta f/\Delta x$ vpravo od tohoto bodu se liší od podílu vlevo. Graf funkce nemá v tomto bodě tečnu a funkce nemá v tomto bodě derivaci. Na obrázku vpravo jsou ke grafu tečkovaně dokresleny „polotečny“ na obě strany.

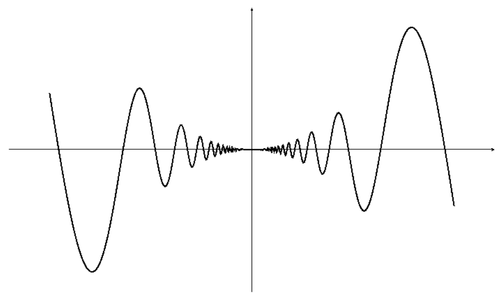




Podobným příkladem je funkce absolutní hodnota: $x \mapsto |x|$ v bodě nula.

V dalších příkladech ukážeme, že tečna ke grafu funkce tak, jak jsme ji definovali, nemusí mít obvyklý geometrický význam. Její hlavní význam vyjadřuje vztah (1.4). Na obou obrázcích dole nás zajímá tečna ke grafu funkce v počátku soustavy souřadné. Z geometrie jste zvyklí, že například kružnice leží celá na jedné straně své tečny. Na obrázku vlevo tomu tak není a tečna protíná graf v tečném bodě. Na obrázku vpravo je tečnou osa x, protože vyhovuje aproximační vlastnosti (1.4) a nevadí, že v okolí tečného bodu graf tečnu mnohokrát[11] protne.





1.7 Nekonečně malé veličiny

Pojem derivace funkce pochází od sira Isaaca Newtona (1642 – 1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716). Pojmy spojitosti funkce (Bolzano 1817) a limity funkce (Weierstrass 1874) jsou o víc jak sto let mladší. Pánové Newton a Leibniz za derivaci považovali podíl nekonečně malých přírůstků funkční hodnoty a proměnné funkce.

Nekonečně malý přírůstek proměnné x označíme $\mathrm{d}x$. Jemu odpovídá nekonečně malý přírůstek funkční hodnoty $\mathrm{d}y = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$. Pro funkci $x \mapsto x^2$ dostaneme

$$\mathrm{d}y = (x+\mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2.$$

Odtud dostaneme podíl

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$

Přírůstek $\mathrm{d}x$ je nekonečně malý, proto za něj dosadíme nulu. Dostaneme derivaci funkce $x \mapsto x^2$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

[11]Dokonce nekonečněkrát, předpis funkce je $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$. Srojvejte s grafem funkce $x \mapsto x \sin(1/x)$ uvedeným v 1.3

Ve výpočtu je rozpor: výrazem dx nejdříve dělíme a pak za něj dosadíme nulu. S tímto rozporem se matematici dlouhé roky vyrovnávali konceptem nekonečně malé nenulové veličiny, kterou chápali intuitivně. Teprve v dobách Bolzana a Weierstrasse matematici začali používat pojmy spojitosti a limity k vyřešení tohoto rozporu.

1.8 WolframAlpha

Na webu www.wolframalpha.com si můžete nechat vykreslit grafy elementárních funkcí. Klíčové slovo je `plot`. Vyzkoušejte

```
plot(x sin(1/x))
plot(x sin(1/x), (x,0,0.1))
plot(x^2, x^4, x^6)
plot(sin(x)/x)
plot(2^(1/x))
```

Grafy berte jako užitečnou ilustraci, ale mějte na paměti, že jsou vykreslovány z vypočítaných funkčních hodnot a někdy takový způsob některé vlastnosti funkce zkreslí. Podívejte se třeba na graf funkce $x \mapsto e^{\operatorname{cotg} x}$ na intervalu $[\pi/4, \pi]$ a zamyslete se nad průnikem grafu s osou x.

```
plot(exp(cot(x)), (x, PI/4, PI))
```

Jedním z cílů tohoto textu je vyložit, jak získat zajímavé body grafu výpočtem. WolframAlpha vám pak může sloužit jako kontrola vašich výpočtů, nebo jako vodítko, které vaše výpočty nasměruje, nevíte-li si s nimi rady. Při výkladu budeme WolframAlpha používat pro znázornění probíraných pojmů.

1.9 Elementární funkce

Dalším naším cílem bude definování elementárních funkcí a zkoumání jejich vlastností.

Začneme funkcemi, k jejichž definici stačí aritmetické operace. Patří mezi ně *polynomy*, možná je znáte pod názvem mnohočleny, a podíly polynomů, ty budeme nazývat *racionální funkce*.

Řekneme si něco o kořenech polynomů a o rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů. Tyto pojmy by vám měly být povědomé pro kvadratické polynomy. My je budeme uvažovat i pro polynomy vyššího stupně.

Předpokládáme, že čtenář umí sčítat racionální funkce, my si ukážeme opačnou operaci, a sice rozklad racionální funkce na součet jednodušších racionálních funkcí, těm budeme říkat *parciální zlomky*. Řekneme si, jak ze jmenovatele racionální funkce určit jmenovatele parciálních zlomků, například

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\\ \frac{x^2+2x+3}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\end{aligned}$$

a ukážeme si, jak se spočítají hodnoty čísel A, B případně C.

Další funkce, kterými se budeme zabývat, jsou odmocniny. Ukážeme si, že existence odmocnin není úplně samozřejmá a že souvisí s vlastností reálných čísel, o které budeme mluvit v kapitole o číslech.

V kapitole o spojitých funkcích pak ukážeme, že funkce definovaná na intervalu, která je na něm spojitá a navíc buď rostoucí nebo klesající má inverzní funkci, jejíž definiční obor je opět interval. Tato vlastnost nám pak bude sloužit při definování dalších inverzních funkcí, a sice logaritmů a cyklometrických funkcí.[12]

Probereme vlastnosti mocninných funkcí. Budeme je budovat postupně pro exponent, který je přirozené číslo, nula, celé číslo, racionální číslo. Vysvětlíme si přitom, že vztahy

$$x^0 = 1 \qquad x^{-1} = 1/x \qquad x^{1/2} = \sqrt{x} \tag{1.5}$$

jsou důsledkem přirozeného požadavku, aby vztah

$$a^{m+n} = a^m a^n, \tag{1.6}$$

který odvodíme pro exponenty $m, n \in \mathbb{N}$ platil i pro $m, n \in \mathbb{R}$.

Od mocninných funkcí přejdeme k funkcím exponenciálním. Vztahy (1.5) nám umožní pro $a > 0$ definovat funkci $q \mapsto a^q$ pro $q \in \mathbb{Q}$. Z množiny

[12] Mezi cyklometrické funkce patří arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Na kalkulačce jsou obvykle značeny jako $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ a je dobré si pamatovat, že „na mínus prvou“ neoznačuje mocninu.

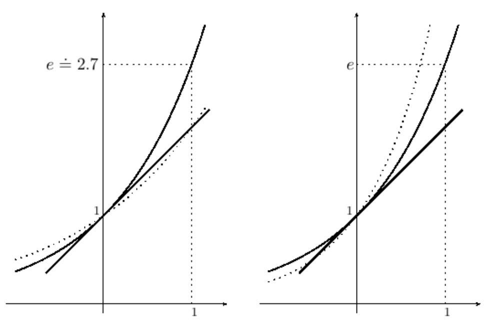
racionálních čísel pak exponenciální funkci spojitě rozšíříme na množinu reálných čísel.

V [2] je symbolem exp označena exponenciální funkce se základem $e \doteq 2.718$. Je zde definovaná vztahy

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)) \tag{1.7}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq 1 + x) \tag{1.8}$$

Přitom (1.7) je jen jinak napsaný vztah (1.6). Vztah (1.8) určuje mimo jiné základ exponenciální funkce, viz následující obrázky.



Na obou obrázcích je plnou čarou graf funkce exp s přímkou o rovnici $y = x+1$. Nerovnost (1.8) se na grafu projeví tím, že se graf exponenciální funkce přímky dotýká a mimo bod dotyku leží nad přímkou.

Tečkovaně jsou na obrázcích grafy s jiným základem. Na obrázku vlevo $x \mapsto 2^x$, na obrázku vpravo $x \mapsto 4^x$.

Je vidět, že osu y oba tečkované grafy protínají pod jiným úhlem než přímka a leží tedy částečně pod ní. Exponenciální funkce se základem 2 případně 4 tedy nesplňují (1.8).

Ukážeme si později, že vztah (1.8) navíc zajišťuje spojitost exponenciální funkce a tím i jednoznačné rozšíření z racionálních na reálné exponenty.

Budeme definovat logaritmus jako funkci inverzní k exponenciální funkci a budeme používat značení běžné v matematické literatuře – symbolem log budeme značit logaritmus se základem e, který znáte pod názvem přirozený logaritmus. S dekadickým logaritmem se v matematické literatuře setkáváme zřídka.

Exponenciální funkci při obecném kladném základu pak definujeme pomocí exponenciální a logaritmické funkce vztahem $a^x = \exp(x \log a)$.

Připomeneme trigonometrickou definici goniometrických funkcí, zobecnění pro jiné než ostré úhly na jednotkové kružnici a odvodíme součtové vzorce pro sinus a kosinus. Řekneme si, že se goniometrické funkce dají definovat pomocí součtových vzorců podobně jako funkce exponenciální v (1.7), (1.8), ale více se tomuto způsobu věnovat nebudeme a odkážeme případného zájemce na [2]. Vystačíme s definicí na jednotkové kružnici a odvozenými součtovými vzorci.

Kapitola 2

Aritmetika a funkce

Budeme se zabývat funkcemi, k jejichž definici stačí aritmetické operace. Jsou to polynomy[1] a podíly polynomů[2]. Na těchto funkcích vyložíme vlastnosti funkcí jako sudost, lichost, monotonii a řekneme, co je obor hodnot funkce.

Dále se budeme zabývat inverzní funkcí. Vysvětlíme, jak souvisí inverzní funkce s rovnicí s parametrem. Speciálně budeme pomocí inverzní funkce definovat odmocniny.

2.1 Mocniny s přirozeným exponentem

Zápis $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\times}$ můžeme chápat jako zkratku. Tato zkratka vede přímočaře k následující definici a^n pro $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$a^1 = a \quad \text{a pro } n \geq 2 \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \tag{2.1}$$

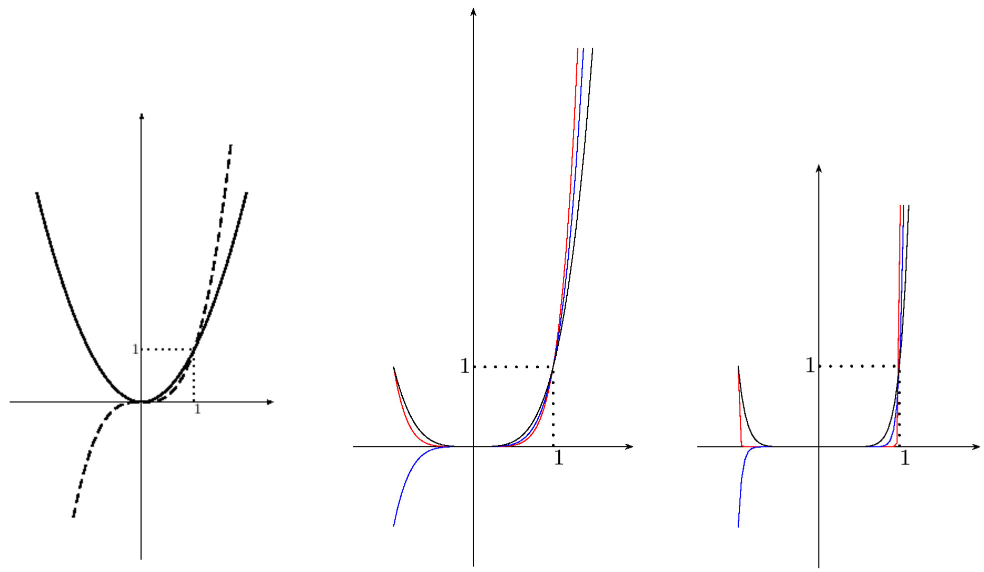
Číslo a nazýváme *základem* mocniny a číslo n *exponentem.*

Funkci $x \mapsto x^n$ nazýváme *mocninnou funkcí.*[3] V celém článku (2.1) budeme uvažovat mocninné funkce jen s kladnými přirozenými exponenty.

2.1.1 Grafy mocninných funkcí

Na následujících obrázcích jsou grafy mocninných funkcí. Vlevo plnou čarou pro exponent $n = 2$ a čárkovanou pro $n = 3$.

[1]Český termín pro polynomy je mnohočleny.
[2]Podíly polynomů nazýváme racionálními funkcemi.
[3]Funkci $x \mapsto a^x$ nazýváme exponenciální funkcí.

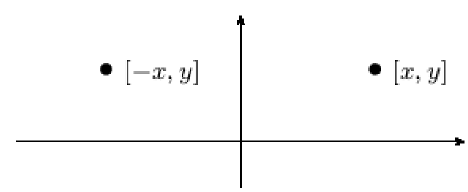


Uprostřed černě pro $n = 4$, modře pro $n = 5$ a červeně pro $n = 6$. Vpravo černě pro $n = 10$, modře pro $n = 21$ a červeně pro $n = 100$.

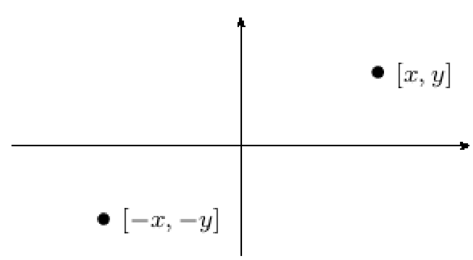
Všechny mocninné funkce jsou definované na množině reálných čísel (tj. jejich definiční obor je $\mathbb{R}$).

2.1.2 Sudost, lichost

Pro sudé n je $(-x)^n = x^n$.
Na grafu se tato vlastnost projeví jako symetrie vzhledem k ose y:
leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce,
pak i bod $[-x, y]$ leží na grafu funkce.



Pro liché n je $(-x)^n = -x^n$.
Na grafu se tato vlastnost projeví jako symetrie vzhledem k počátku:
leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce,
pak i bod $[-x, -y]$ leží na grafu funkce.



Tyto vlastnosti mocninných funkcí vedou k definici sudé a liché funkce.

Definice sudé funkce. Funkci f nazveme *sudou funkcí*, pokud pro každé x

z jejího definičního oboru platí: f je definovaná v $-x$ a $f(-x) = f(x)$.
Po označení definičního oboru funkce f symbolem D definici formálně zapíšeme

$$(\forall x \in D)(-x \in D \wedge f(-x) = f(x))$$

Často místo logické spojky „a zároveň“ $\wedge$ píšeme čárku

$$(\forall x \in D)(-x \in D, f(-x) = f(x))$$

Definice liché funkce. Funkci f nazveme *lichou funkcí*, pokud pro každé x z jejího definičního oboru platí: f je definovaná v $-x$ a $f(-x) = -f(x)$.
Definici formálně zapíšeme

$$(\forall x \in D)(-x \in D, f(-x) = -f(x))$$

2.1.3 Monotonie

V kapitole o číslech 4.3, lemma o umocňování nerovností, ukážeme, že pro nezáporná a, b splňující $a < b$ a přirozené kladné n platí $a^n < b^n$. Toto tvrzení lze zapsat pomocí implikace

$$\text{pro kladné přirozené } n \text{ platí } (\forall a, b \in [0, +\infty))(a < b \Longrightarrow a^n < b^n)$$

Níže připomeneme definici funkce rostoucí na množině. Výše uvedený výrok znamená, že mocninná funkce je rostoucí na intervalu $[0, +\infty)$.

Definice rostoucí funkce. Řekneme, že je funkce f *rostoucí na množině* $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

Ukážeme, že pro lichý exponent je mocninná funkce rostoucí na $\mathbb{R}$. Máme tedy ukázat platnost výroku

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n)$$

Rozebereme postupně čtyři případy: 1) $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 2) $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in [0, +\infty)$ 3) $x_1 \in [0, +\infty)$, $x_2 \in (-\infty, 0)$ 4) $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$

První případ jsme rozebrali výše.

V druhém případě je pravdivý i předpoklad $x_1 < x_2$ i závěr $x_1^n < x_2^n$ implikace, takže je implikace pravdivá.

Ve třetím případě není pravdivý ani předpoklad ani závěr implikace a implikace je tedy pravdivá.

Rozebereme čtvrtý případ:
Je-li $x_1 < x_2$, je $-x_2 < -x_1$ a $-x_1, -x_2 \in (0, +\infty)$. Protože je mocninná funkce na $(0, +\infty)$ rostoucí, plyne odtud $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. Pro lichý exponent upravíme na $-(x_2^n) < -(x_1^n)$ a dále na $x_1^n < x_2^n$.

Proto pro $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ platí implikace $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n$.

Úkoly.

1. Ukažte, že pro sudé n platí

$$(\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0])(x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n > x_2^n)$$

   Funkci splňující tento výrok nazýváme *klesající na množině* $(-\infty, 0]$.

2. Napište definici funkce klesající na množině M.

2.1.4 Obor hodnot

Ze střední školy víte, že mocninné funkce mají pro lichý exponent obor hodnot roven množině reálných čísel a pro sudý exponent množině nezáporných reálných čísel. My se zde zamyslíme, co tato tvrzení znamenají. Nejdříve připomeneme definici oboru hodnot funkce.

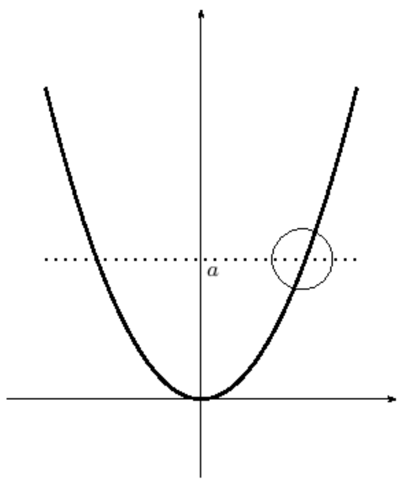
Defince oboru hodnot. Pro funkci f s definičním oborem D nazýváme *oborem hodnot* množinu jejích funkčních hodnot, tedy množinu

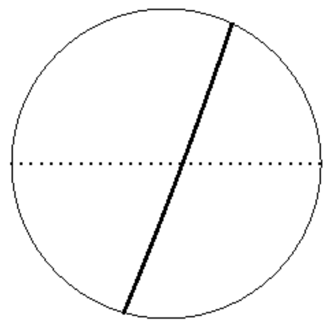
$$H(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

Jak zjistíme z grafu funkce, že číslo $a \in \mathbb{R}$ leží v oboru hodnot funkce? Sestrojíme přímku o rovnici $y = a$ a zjistíme, zda má s grafem společný alespoň jeden bod. Pokud ano, pak je a prvkem oboru hodnot funkce.[4]

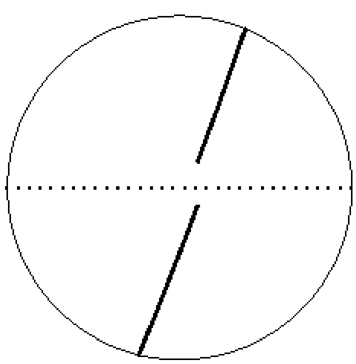
Na obrázku je graf funkce $x \mapsto x^2$ a přímka o rovnici $y = a$ pro $a > 0$. Průsečík grafu[5] a přímky má x-ovou souřadnici vyhovující rovnici $x^2 = a$.

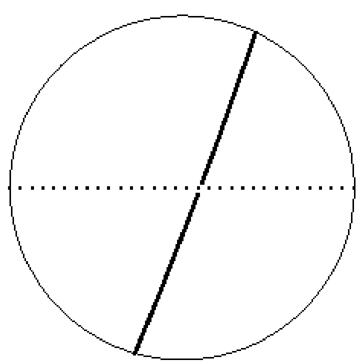
[4] A pokud ne, tak a není prvkem oboru hodnot.
[5] Grafem je parabola.





Na následujících obrázcích bychom rádi zpochybnili samozřejmost existence takových průsečíků. Bude nás zajímat, co se stane, zvětšíme-li výřez s průsečíkem, jako na obrázku vpravo nahoře. Když budeme uvažovat nějaký hmotný objekt, třeba papír, na kterém právě čtete tyto řádky[6], tak z fyziky víte, že pro naše oči a náš hmat pevná hmota se při velkém zvětšení přemění na malinké atomy, které se skládají z ještě mnohem menšího jádra obklopeného prázdnem vyplněným ještě menšími elektrony.[7] Nemůže se stát něco podobného při zvětšení okolí průsečíku?





Na obrázcích je vyznačeno, co by se mohlo při zvětšení stát: na levém je v grafu mezera okolo přímky $y = a$ a přímka tedy s grafem nemá průsečík. Na obrázku vpravo sice mezera není, ale v grafu chybí právě ten bod, ve

[6]případně elektronické zařízení, ze kterého čtete

[7]Zjistěte kolikrát je atomové jádro menší než atom.

kterém by se s ním přímka protnula.

V následujícím textu ukážeme, že pro mocninnou funkci při sebevětším zvětšení ani jeden z obrázků nenastane. Důsledkem bude existence průsečíku a tedy existence odmocniny.

2.1.5 Spojitost

Ukážeme, že v grafu mocninné funkce nemůže vzniknout mezera. Upravíme rozdíl funkčních hodnot

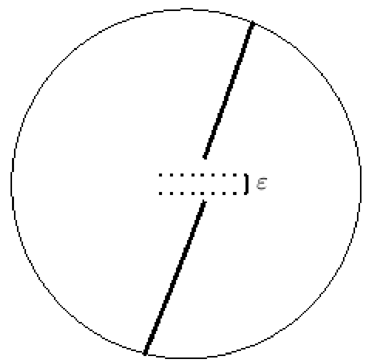
$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$$

Budeme uvažovat a, b z intervalu $I = [0, M]$. Pak je

$$b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1} \leq nM^{n-1}$$

Budeme předpokládat, že $a < b$ a nerovnici vynásobíme kladným rozdílem $b - a$. Dostaneme

$$b^n - a^n \leq nM^{n-1}(b-a)$$



Volbou dostatečně malého $b - a$ můžeme udělat $b^n - a^n$ dostatečně malé. Konkrétně pro $b - a = \frac{\varepsilon}{nM^{n-1}}$ dostaneme $b^n - a^n \leq \varepsilon$. Proto nemůže nastat situace na obrázku.

Co když je v grafu mezera nulové velikosti? Ukážeme, že taková situace nastane, pokud za čísla považujeme jen čísla racionální a naopak nenastane při použití čísel reálných.

2.1.6 Mocninná funkce na racionálních číslech

Připomínáme, že racionální čísla jsou podíly celých čísel. Mezi racionální čísla patří i čísla celá, například číslo dva můžeme napsat ve tvaru podílu jako 2/1.

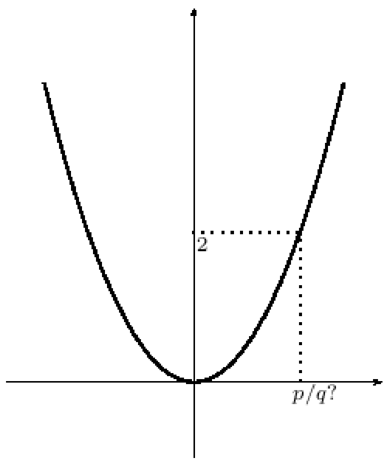
Budeme hledat vzor čísla 2 funkce druhá mocnina v množině racionálních čísel, tedy budeme hledat dvojici celých čísel p, q splňující

$$(p/q)^2 = 2$$

Úpravou dostaneme

$$p^2 = 2q^2$$

Na pravé straně rovnice je sudé celé číslo, proto musí být sudé číslo i na levé straně, a proto musí být i číslo p sudé[8].



Odtud plyne, že lze p vyjádřit jako dvojnásobek celého čísla r

$$p = 2r$$

dosazením $p^2 = 4r^2$ a pokrácením dvěma dostaneme

$$2r^2 = q^2$$

odkud podobnou úvahou plyne, že je je i číslo q sudé.

Došli jsme tedy v závěru, že obě čísla v podílu $p/q = 2$ musí být sudá. To je ale ve sporu s tím, že každé racionální číslo je možné vyjádřit ve zkráceném tvaru tak, že je čitatel nesoudělný s jmenovatelem.

Odtud plyne, že neexistuje dvojice celých čísel splňující $(p/q)^2 = 2$.

2.1.7 Reálná čísla a odmocnina

V minulém odstavci jsme ukázali, že v množině racionálních čísel nemá rovnice řešení, tedy neexistuje racionální číslo q splňující $q^2 = 2$. Z toho důvodu zavádíme reálná čísla. Názorně můžeme reálná čísla definovat pomocí vzájemně jednoznačné korespondence s body na přímce – zadáme na přímce polohu nuly a jedničky, a pak každému bodu na přímce odpovídá právě jedno reálné číslo a každému reálnému číslu odpovídá právě jeden bod na přímce. Takovou korespondenci v matematice nazýváme *vzájemně jednoznačným zobrazením.*

Definice vzájemně jednoznačné funkce – bijekce. Funkci f nazveme *vzájemně jednoznačným zobrazením* množiny $D \subseteq \mathbb{R}$ na množinu $H \subseteq \mathbb{R}$, pokud ke každému $y \in H$ existuje právě jedno $x \in D$ splňující $f(x) = y$ a ke každému $x \in D$ existuje právě jedno $y \in H$ splňující $f(x) = y$. Vzájemně

[8]Kdyby bylo p liché, bylo by liché i p^2.

jednoznačné zobrazení také někdy nazýváme *bijekcí* množiny D na množinu H.

Úloha. Rozmyslete si, že každé vzájemně jednoznačné zobrazení je také prostým zobrazením.

Poznámka. Jiný způsob zavedení reálných čísel je pomocí jejich nekonečného desetinného rozvoje. Upozorněme na překvapivou skutečnost, že zobrazení množiny reálných čísel na množinu nekonečných desetinných rozvojů není vzájemně jednoznačné. Například číslu jedna odpovídají dva různé desetinné rozvoje $1.\overline{0}$ a $0.\overline{9}$.

TODO: SOUVISLOST S VLASTNOSTÍ SUPREMA (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

2.2 Odmocniny

Definice odmocniny z nezáporného čísla. Pro $a \in [0, +\infty)$ a sudé $n \geq 2$ definujeme *n-tou odmocninu z a* jako nezáporný kořen rovnice $x^n = a$. Značíme ji $\sqrt[n]{a}$. Pro $n = 2$ zpravidla značíme stručněji $\sqrt{a}$ a vynecháváme přívlastek druhá.

Úkoly.

1. Načrtněte graf funkce $x \mapsto x^2$ a určete graficky druhou odmocninu z pěti.

2. Ukažte, že je odmocnina z pěti definovaná jednoznačně a vysvětlete, jak to plyne z monotonie mocninné funkce.

Definice odmocniny lichého stupně. Pro $a \in \mathbb{R}$ a liché $n \geq 3$ definujeme *n-tou odmocninu z a* jako kořen rovnice $x^n = a$. Značíme ji $\sqrt[n]{a}$.

Úkoly.

1. Načrtněte pro vhodné n graf funkce $x \mapsto x^n$ a zvolte reálné číslo a a určete graficky n-tou odmocninu z a. Volte sudé i liché n a ke každému n kladné, záporné i nulové a.

2. Ukažte, že odmocnina je definovaná jednoznačně a vysvětlete, jak to plyne z monotonie mocninné funkce.

3. Načrtněte grafy funkcí $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

2.3 Inverzní funkce

V předchozím odstavci jsme definovali odmocninu z a jako kořen rovnice $x^n = a$ s neznámou x a parametrem a. Funkci této vlastnosti nazýváme inverzní funkcí.

Definice inverzní funkce. Nechť je zadaná funkce f. Řekneme, že k ní existuje inverzní funkce, pokud má rovnice $y = f(x)$ nejvýše jeden kořen. Funkci, která y přiřadí tento kořen, nazýváme *inverzní funkcí* k funkci f a značíme ji f^{-1}.

V definici inverzní funkce je podstatné, že rovnice $y = f(x)$ má nejvýše jeden kořen. Takovou funkci nazýváme prostou funkcí.

Definice prosté funkce. Funkci f nazveme *prostou funkcí*, pokud pro každou dvojici x_1, x_2 z jejího definičního oboru platí implikace

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

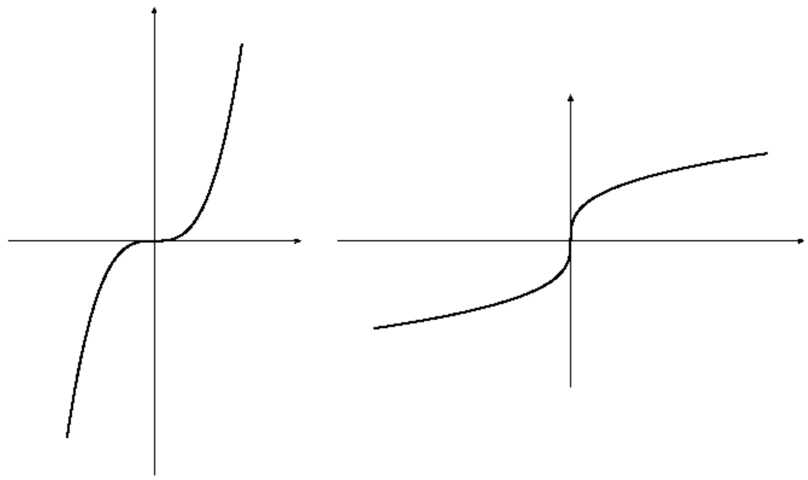
Lemma o jednoznačnosti vzorů prosté funkce. Nechť je funkce f prostá. Pak má rovnice $f(x) = a$ s neznámou x a parametrem a pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ nejvýše jeden kořen.

DŮKAZ. Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kořeny rovnice $f(x) = a$, pak platí $f(x_1) = f(x_2)$. Protože předpokládáme, že je funkce f prostá, plyne odtud $x_1 = x_2$. Proto má rovnice $f(x) = a$ nejvýše jeden kořen.

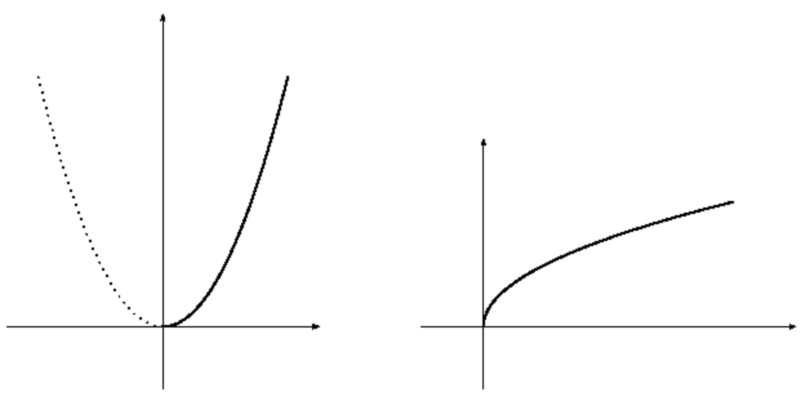
Důsledek. Je-li f prostá funkce, pak má rovnice $f(x) = a$ jeden kořen pro a z oboru hodnot funkce f a nemá žádný kořen pro ostatní a.

2.3.1 Odmocnina jako inverzní funkce

Z minulých odstavců plyne, že funkce třetí odmocnina je inverzní funkcí třetí mocniny. Na obrázcích uvádíme jejich grafy.



Jiné je to v případě druhé odmocniny, protože funkce druhá mocnina nemá inverzní funkci. Změníme-li ale vhodně její definiční obor, pak inverzní funkci mít bude. Na obrázku je plnou čarou graf druhé mocniny se změněným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní – druhé odmocniny.



Ještě uvedeme formální definici výše zmíněných pojmů.

Definice zúžené a rozšířené funkce. Pokud pro funkci f s definičním oborem $D(f)$ a funkci g s definičním oborem $D(g)$ platí $D(f) \subseteq D(g)$ a pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$, pak nazýváme funkci f *zúžením funkce* g *na množinu* $D(f)$. Značíme $f = g|_{D(f)}$. Funkci g nazýváme *rozšířením funkce* f na množinu $D(g)$.

Příklad. Uvažujme funkce $g : x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$ (tedy definičním oborem g je množina reálných čísel $\mathbb{R}$) a $f : x \mapsto x^2, x \in [0, +\infty)$ (tedy definičním oborem

f je interval $[0, +\infty)$. Pak je f zúžením g na interval $[0, +\infty)$, formálně zapsáno $f = g|_{[0,+\infty)}$.

Druhá odmocnina je inverzní funkcí k této zúžené funkci.

2.4 Polynomy

TODO: Definice, stupeň, nulový polynom, kořen polynomu, dělení polynomů, rozklad polynomu na kořenové činitele. Nerozložitelné polynomy v oboru komplexních čísel, v oboru reálných čísel. Maximální počet kořenů polynomu, rovnost polynomů. (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Nerozlozložitelné polynomy v komplexním oboru jsou lineární polynomy (viz přednáška z algebry). Nerozlozložitelnými polynomy v reálném oboru jsou i některé kvadratické polynomy – viz články 16.1., 16.2. z dodatku o komplexních číslech.

Otázky. Kolik reálných kořenů může mít kvadratická rovnice? Kolik kubická rovnice? Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše pět s reálnými koeficienty $a_0, \ldots, a_5$?

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše n s reálnými koeficienty $a_0, \ldots, a_n$?

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Otázka. Kolik kořenů $x \in \mathbb{R}$ má rovnice v závislosti na hodnotách a, b? Má pro nějaké hodnoty a, b více jak jeden kořen?

$$ax + b = 0$$

Otázka. Který z následujících polynomů nelze v reálném oboru rozložit na součin polynomů nižších stupňů? Takovým polynomům budeme říkat nerozložitelné polynomy.

$$x^2 + x + 1 \qquad x^2 - x - 1 \qquad x^3 + 1 \qquad x^4 + 1$$

Úkol. Upravte polynomy na součin v reálném oboru nerozložitelných polynomů.

$$x^3 + 8 \qquad x^5 - 32 \qquad x^3 + 2x - 3 \qquad x^8 - 1$$

2.5 Racionální funkce

TODO: Definice, ryze lomená racionální funkce. Parciální zlomky, rozklad racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků. (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Úkoly. Vyjádřete výrazy jako součet polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{x^3}{x^2+1} \qquad \frac{-x^2+2}{x^2-1} \qquad \frac{3x^2+x+2}{x^3-4x+3} \qquad \frac{1}{x^3(x^2+1)} \qquad \frac{x^3}{(x^2+x+3)^2}$$

Kapitola 3

Cvičení na funkce a jejich grafy

Cílem této kapitoly je procvičit pojmy vyložené v předchozích kapitolách a především upozornit na jejich vzájemné souvislosti.

3.1 Rovnice s parametrem

Začneme s dvěma funkcemi, jejichž grafy umíme nakreslit

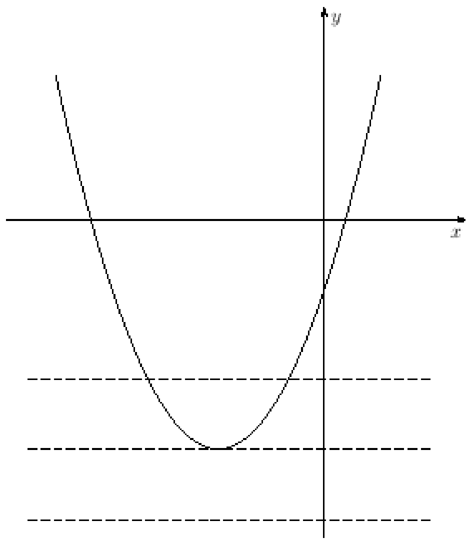
$$g : x \mapsto x^2 + 3x - 1 \qquad h : x \mapsto \frac{x-3}{2x+1}$$

a ukážeme, jak řešit, nejdříve graficky a poté i početně, rovnice s neznámou x a parametrem y. Z výsledků pak určíme obor hodnot funkce a pokud existuje, tak i inverzní funkci.

$$x^2 + 3x - 1 = y \qquad (3.1)$$

$$\frac{x-3}{2x+1} = y \qquad (3.2)$$

3.1.1 Grafické řešení rovnice s parametrem



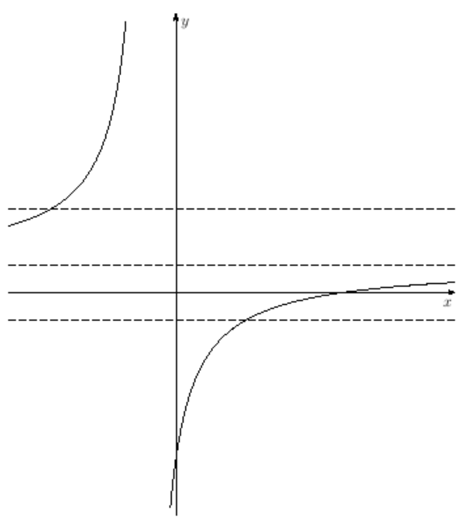
Vlevo jsou spolu s parabolou

$$y = x^2 + 3x - 1$$

čárkovaně přímky o rovnicích

$$y = \text{ konstanta}$$

Hodnoty konstanty na pravé straně rovnice jsme vybrali tak, aby měla rovnice (3.1) dva kořeny, jeden kořen a žádný kořen. Každému z kořenů odpovídá průsečík přímky s parabolou.



Vlevo je k hyperbole

$$y = \frac{x-3}{2x+1}$$

nakreslena asymptota $y = 1/2$. Pro toto ypsilon nemá rovnice (3.2) řešení – přímka (asymptota) se s hyperbolou neprotíná.
Přímky pro ostatní hodnoty ypsilon (na obrázku $y = -1/2$ a $y = 3/2$) se s hyperbolou protínají v jednom bodě.

3.1.2 Početní řešení rovnic s parametrem

Při řešení rovnic budeme postupovat obdobně jako v případě konkrétního čísla na pravé straně rovnice.

U rovnice (3.1) nejdřív převedeme pravou stranu rovnice nalevo

$$x^2 + 3x - 1 - y = 0$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = 3^2 - 4(-1 - y),$$

po úpravě

$$D = 13 + 4y$$

Víme, že kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny v případě $D > 0$, tedy v případě $y > -13/4$. Jeden reálný kořen má v případě $D = 0$, tedy $y = -13/4$ a v případě $D < 0$, tedy $y < -13/4$ nemá žádný reálný kořen.

Kořeny vypočteme dosazením do vzorce. Dostaneme

Pro $y > -13/4$ má rovnice kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13 + 4y}}{2}$$

Pro $y = -13/4$ má rovnice kořen

$$x = -3/2$$

Pro $y < -13/4$ nemá rovnice žádný kořen.

Výsledek výpočtu se shoduje s grafickým řešením, navíc jsme nalezli souřadnice vrcholu paraboly a tím i obor hodnot funkce g

$$H(g) = [-13/4, +\infty)$$

Rovnici (3.2) vynásobíme jmenovatelem. Dostaneme[1]

$$x - 3 = y(2x + 1)$$

Na pravé straně roznásobíme závorku

$$x - 3 = 2xy + y$$

Výrazy obsahující neznámou x převedeme na levou stranu, ostatní výrazy na stranu pravou a na levé straně vytkneme x

$$x(1 - 2y) = y + 3$$

[1] Po vyřešení rovnice bychom správně měli ověřit, že získaný kořen splňuje i rovnici před úpravou – tedy že $x \neq -1/2$, pro které má jmenovatel nulovou hodnotu. Zde si stačí uvědomit, že pro $x = -1/2$ je $x - 3 \neq 0 = y(2x + 1)$.

Pro $1-2y=0$, tedy $y=1/2$ dostaneme rovnici $0=7/2$, která nemá řešení. Pro ostatní y dostaneme kořen rovnice vydělením nenulovým výrazem $1-2y$

Výsledek tedy shrneme konstatováním, že pro $y\neq 1/2$ má rovnice jeden kořen

$$x=\frac{y+3}{1-2y}$$

a pro $y=1/2$ nemá žádný kořen.

Výsledek výpočtu se shoduje s grafickým řešením, navíc jsme nalezli předpis inverzní funkce

$$h^{-1}: y\mapsto \frac{y+3}{1-2y}, \qquad y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

3.2 Další příklady na rovnice s parametrem

V kapitole 3.1 jsme řešili rovnice s parametrem jednoduché natolik, že jsme je uměli vyřešit početně i graficky a výsledky jsme porovnali. Zde se budeme věnovat složitějším rovnicím a graf, který uvedeme na závěr, odvodíme z našeho výpočtu. Úmyslně volíme takové funkce, při kterých budeme řešit kvadratickou rovnici s parametrem.

3.2.1

$$y=\frac{x^2-3x+1}{x+2}$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem, vechny členy převedeme na jednu stranu a upravíme do tvaru kvadratické rovnice. Dostaneme

$$x^2+x(-y-3)+(1-2y)=0 \tag{3.3}$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$D=(-y-3)^2-4(1-2y)$$

a po úpravě

$$D=y^2+14y+5$$

Počet kořenů rovnice (3.3) dostaneme vyřešením kvadratické rovnice $D=0$ a nerovnice $D>0$.

Pro $y = -7 \pm \sqrt{44}$ má rovnice (3.3) jeden kořen. Dosazením do vzorce pak dostaneme, že tento kořen je $x = (y+3)/2$, a tedy

$$\begin{array}{llll} \text{pro} & y_1 = -7 + \sqrt{44} & \text{je} & x_1 = -2 + \sqrt{11} \\ \text{pro} & y_2 = -7 - \sqrt{44} & \text{je} & x_2 = -2 - \sqrt{11} \end{array}$$

Pro $y \in (-\infty, -7 - \sqrt{44}) \cup (-7 + \sqrt{44}, +\infty)$ má rovnice (3.3) dva kořeny

$$x = \frac{y + 3 \pm \sqrt{y^2 + 14y + 5}}{2}$$

Pro ostatní y rovnice nemá řešení.

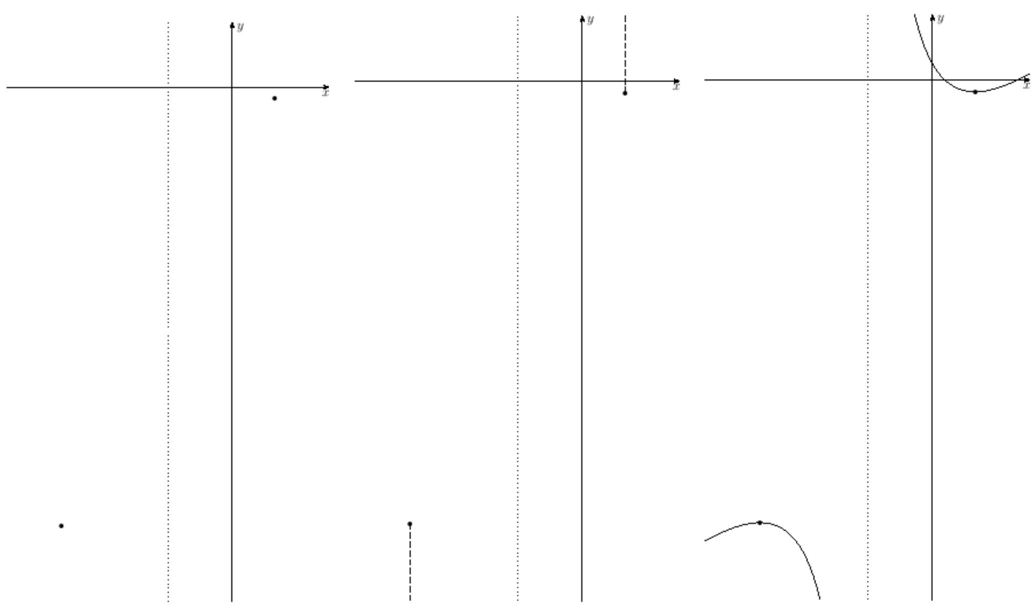
Z našich výpočtů zjistíme, že funkce není prostá, nemá tedy inverzní funkci a její obor hodnot je $(-\infty, -7 - \sqrt{44}] \cup [-7 + \sqrt{44}, +\infty)$. Pomocí $y_{1,2}$ tento obor hodnot zapíšeme $(-\infty, y_2] \cup [y_1, +\infty)$.

Výsledky ještě postupně vyneseme do grafu.

V grafu vlevo jsme vyznačili body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a tečkovaně přímku $x = -2$ (pro tuto hodnotu není funkce definovaná, graf proto vyznačenou přímku neprotíná).

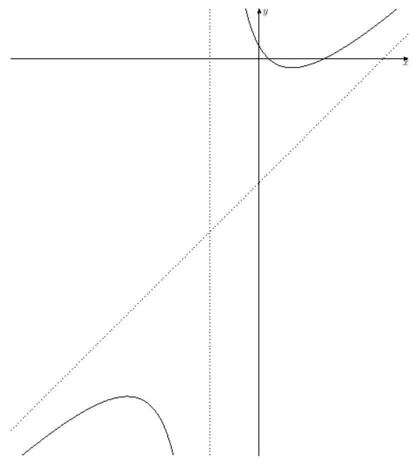
V prostředním grafu jsme dále čárkovaně vyznačili y ležící v oboru hodnot funkce.

V pravém grafu jsme doplnili graf funkce.



Přesnější graf získáme vydělením

$$\frac{x^2-3x+1}{x+2} = x-5+\frac{11}{x+2}$$



Do grafu dokreslíme přímku o rovnici $y = x - 5$.
Pro velká kladná x je $11/(x+2)$ malé kladné, a tedy graf funkce leží malý kousek nad touto přímkou.
Pro velká záporná x je $11/(x+2)$ malé záporné, a tedy graf funkce leží malý kousek pod touto přímkou.
Pro úplnost uveďme, že grafem je v tomto případě hyperbola.

3.2.2

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

První úprava rovnice je obdobná jako v minulém příkladě.

$$yx^2 - x + y = 0 \tag{3.4}$$

Pro $y = 0$ dostáváme rovnici $-x = 0$ s jedním kořenem.
Pro $y \neq 0$ dostáváme kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = 1 - 4y^2$$

Rovnice $D = 0$ je splněná pro $y_1 = 1/2$ a pro $y_2 = -1/2$, nerovnice $D > 0$ je splněná pro $y \in (-1/2, 1/2)$. Kořeny kvadratické rovnice dostaneme dosazením do vzorce.

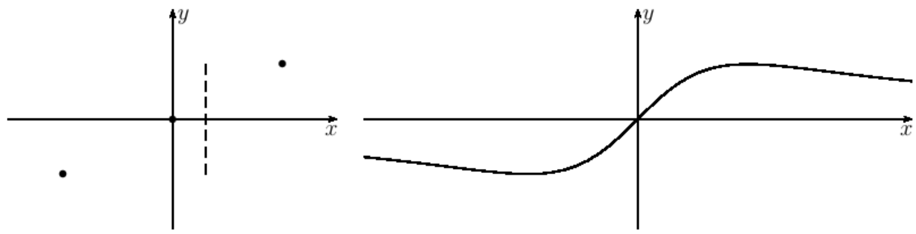
Rovnice tedy má

$$\begin{aligned}
&\text{pro} \quad y = -1/2 \quad \text{kořen} \quad x = -1 \\
&\text{pro} \quad y \in (-1/2, 0) \quad \text{kořeny} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \\
&\text{pro} \quad y = 0 \quad \text{kořen} \quad x = 0 \\
&\text{pro} \quad y \in (0, 1/2) \quad \text{kořeny} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \\
&\text{pro} \quad y = 1/2 \quad \text{kořen} \quad x = 1
\end{aligned}$$

Pro ostatní y rovnice nemá řešení.

Odvodíme odsud, že funkce není prostá a nemá tedy inverzní funkci a její obor hodnot je $[-1/2, 1/2]$.

Výsledky opět vyneseme postupně do grafu.



Na obrázku vlevo jsme vynesli tři body grafu a čárkovaně vyznačili obor hodnot. Na pravém obrázku je graf funkce.

3.3 Limity

Při kreslení grafu v příkladu 3.2.1 jsme vydělili mnohočleny

$$\frac{x^2-3x+1}{x+2} = x - 5 + \frac{11}{x+2} \tag{3.5}$$

a pomohli si dále úvahou o hodnotách zlomku $11/(x+2)$ pro x blízké mínus dvěma nebo velké kladné i záporné.

Později zavedeme pojem limity a budeme říkat, že
hodnota výrazu $11/(x+2)$ se pro x blížící se
ke dvěma zprava se blíží k plus nekonečnu
ke dvěma zleva se blíží k mínus nekonečnu
k plus nekonečnu se blíží k nule
k mínus nekonečnu se blíží k nule

Nebo také budeme říkat, že limita výrazu ... je pro x jdoucí k ... rovna ...

Formálně budeme x blížící se ke dvěma zprava zapisovat $x \to 2^+$ a x blížící se ke dvěma zleva $x \to 2^-$. Podobně x blížící se k plus nekonečnu zapíšeme $x \to +\infty$ a k mínus nekonečnu $x \to -\infty$.

Výroky napsané výše slovně pak zapíšeme: $11/(x+2) \to +\infty$ pro $x \to 2^+$, a podobně ostatní.

Podobně bychom v příkladu 3.2.2 mohli upravit

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

a odtud usoudit, že pro velká x budou funkční hodnoty malé kladné a pro velká záporná x budou malé záporné a říkat tedy, že limita tohoto výrazu je pro x jdoucí k plus a mínus nekonečnu rovná nule.

V další kapitole budeme zkoumat funkce

$$x \mapsto \frac{x^2+2x}{x^2-1} \tag{3.6}$$

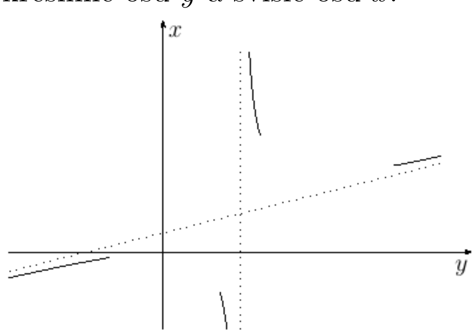
$$y \mapsto \frac{y^2}{4y-2} \tag{3.7}$$

Rozebereme zde chování těchto funkcí v okolí kořenů jmenovatele a v okolí obou nekonečen.

Při zkoumání funkce z (3.7) začneme úpravou

$$\frac{y^2}{4y-2} = y^2 : (4y-2) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{8} + \frac{1}{16y-8}$$

Protože je zde y nezávisle proměnná, prohodíme osy, tedy vodorovně nakreslíme osu y a svisle osu x.



Na obrázku vlevo je tečkovaně nakreslená přímka $x = y/4 + 1/8$ a přímka $y = 1/2$. Plnou čarou je vyznačena závislost x na y na základě úvahy: k $y/4 + 1/8$ přičítáme $1/(16y-8)$ a to je pro $y \to -\infty$ malé záporné, pro $y \to 1/2^-$ velké záporné, pro $y \to 1/2^+$ velké kladné a pro $y \to +\infty$ malé kladné.

Při zkoumání funkce z (3.6) spočítáme limity zprava a zleva v bodech ± 1 a $\pm\infty$.

Pro x o málo větší než jedna je čitatel $x^2 + 2x$ zhruba roven třem a jmenovatel je kladný s hodnotou blízkou nule. Zlomek má tedy velkou kladnou hodnotu. Formálně tuto úvahu zapíšeme: $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \to +\infty$ pro $x \to 1^+$

Pro $x \to 1^-$ je jmenovatel malý záporný, a proto $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \to -\infty$.

Graf pro x hodně velká ($x \to +\infty$ a $x \to -\infty$) získáme následující úvahou: zlomek rozšíříme výrazem $1/x^2$ (stejnou úpravu lze udělat vytknutím

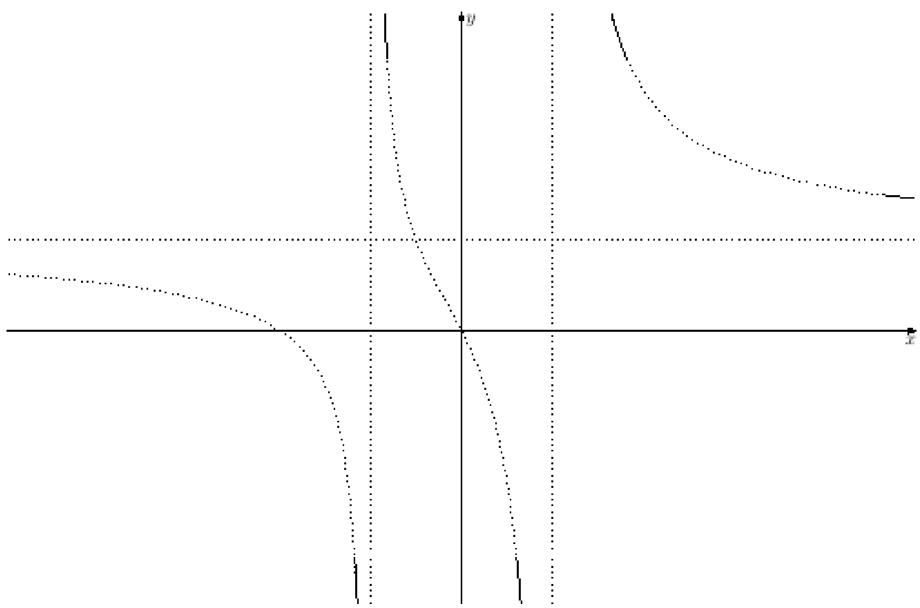
x^2) a upravíme

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{x^2}(x^2+2x)}{\frac{1}{x^2}(x^2-1)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Pro velká x je čitatel i jmenovatel přibližně roven jedné, tedy $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \to 1$.

Pro velká kladná x ještě můžeme doplnit: čitatel je o trochu větší než jedna a jmenovatel o trochu menší než jedna, proto má zlomek hodnotu o trochu větší než jedna. Pro x velká záporná obdobnou úvahu nelze provést, dělíme dvě čísla o trochu menší než jedna a výsledek tedy může být i větší i menší než jedna.

Na následujícím obrázku jsou plnými čarami znázorněny výsledky našich úvah.



Ze spojitosti vyšetřované funkce plyne, že rovnice (3.8) má pro libovolné číslo y kořen $x \in (-1, 1)$. Pro $y < 1$ má pak ještě jeden kořen $x \in (-\infty, -1)$ a pro $y > 1$ kořen $x \in (1, +\infty)$. Kořenů může být i více, pokud by funkce nebyla na uvedených intervalech monotonní.

V následující kapitole ukážeme, že kořenů více není. Zjistíme tak, že je funkce na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ klesající a její graf tedy vypadá jako výše uvedená tečkovaná křivka.

3.4 Další příklady na rovnice s parametrem

3.4.1

Probereme funkci, jejíž limity jsme spočítali v předchozí kapitole. Řešení rovnice s parametrem nám pomůže části grafu spojit.

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \tag{3.8}$$

Začneme obdobnými úravami jako v předchozích příkladech

$$x^2(y - 1) - 2x - y = 0$$

Pro $y = 1$ dostáváme rovnici $-2x - 1 = 0$ s kořenem $x = -1/2$.
Pro $y \neq 1$ dostáváme kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = 4 + 4y(y - 1)$$

který nabývá kladných hodnot pro všechny reálné hodnoty y. Rovnice má tedy pro $y \neq 1$ dva kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{y^2 - y + 1}}{y - 1}$$

Z výpočtů plyne, že obor hodnot funkce je množina reálných čísel $\mathbb{R}$, funkce není prostá a nemá tedy inverzní funkci.

Graf jsme uvedli nahoře včetně úvah opírajících se o výsledky výpočtu.

Úkol. Nechte WolframAlpha vykreslit grafy funkcí

$$x \mapsto \frac{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} \qquad x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1}$$

a porovnejte s výše uvedeným grafem.

Návod. Použijte příkaz Plot((1+sqrt(x*x-x+1))/(x-1)).

3.4.2

Uvedeme ještě jeden příklad, ve kterém při řešení rovnice budeme umocňovat. Vysvětlíme, proč se o takové úpravě říká, že není ekvivaletní. Dále v příkladě zopakujeme pojmy prostá a inverzní funkce a souvislosti.

$$y = 2x + \sqrt{4x^2 - 2x}$$

Osamostatníme odmocninu a umocníme

$$\begin{aligned} y - 2x &= \sqrt{4x^2 - 2x} && (3.9) \\ (y - 2x)^2 &= 4x^2 - 2x && (3.10) \\ y^2 - 4xy + 4x^2 &= 4x^2 - 2x \end{aligned}$$

Všimněte si, že kvadratický člen $4x^2$ se odečte a dostaneme lineární rovnici

$$\begin{aligned} y^2 &= 4xy - 2x \\ y^2 &= x(4y - 2) \\ x &= \frac{y^2}{4y - 2} \end{aligned}$$

Pro $y = 1/2$ nemůžeme udělat poslední úpravu. Pro toto y má rovnice před úpravou tvar $1/4 = 0$, nemá tedy řešení. Pro $y \neq 1/2$ jsme dostali kořen $x = y^2/(4y - 2)$.

Během řešení rovnice jsme při úpravě (3.9) na (3.10) umocňovali. V případě, že se strany rovnice před úpravou liší znaménkem, například $L = y - 2x = -2$, $P = \sqrt{4x^2 - 2x} = 2$, není rovnice splněna. Po úpravě rovnice splněna je $(y - 2x)^2 = (-2)^2 = 4$, $4x^2 - 2x = 2^2 = 4$. Umocňování tedy může rozšířit množinu kořenů rovnice a je třeba ověřit, zda kořeny rovnice (3.10) vyhovují i rovnici (3.9). Obvykle ověřujeme dosazením kořenů do rovnice (zkouškou). My zde ukážeme jiný způsob ověření. Využijeme následující tvrzení (lemma).

Lemma. Pokud pro čísla $L, P \in \mathbb{R}$ platí $L^2 = P^2$, pak je buď $L = P$ nebo $L = -P$.

Důkaz je jednoduchý. $L^2 = P^2$ upravíme na $L^2 - P^2 = 0$ a dále na $(L - P)(L + P) = 0$ a odtud plyne, že buď je $L - P = 0$ nebo $L + P = 0$ a odtud plyne požadované tvrzení. □

V našem případě je $P = \sqrt{4x^2 - 2x} \geq 0$. Proto stačí zjistit, zda je i $L = y - 2x \geq 0$. Potom nemůže nastat případ $L = -P$ a tedy z $L^2 = P^2$ plyne $L = P$.

Zjistěme tedy, zda platí $L \geq 0$. Dosazením a úpravami dostaneme

$$L = y - 2x = y - \frac{2y^2}{4y - 2} = y - \frac{y^2}{2y - 1} = \frac{y^2 - y}{2y - 1}$$

Vyřešením nerovnice $(y^2-y)/(2y-1) \geq 0$, dostaneme[2] $y \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty)$.

ZÁVĚR: rovnice má pro $y \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty)$ kořen $x = y^2/(4y-2)$. Pro ostatní y nemá rovnice řešení.

Ještě jsme výše slíbili vysvětlit, proč používáme termín (ne)ekvivaletní úprava. Jak souvisí úprava s ekvivalencí? Při úpravách rovnice chceme, aby množina kořenů rovnice před úpravou byla totožná s množinou kořenů rovnice po úpravě. Pro konkrétní hodnotu proměnné se můžeme na každou z rovnic dívat jako na výrok. A rovnost množin kořenů znamená, že jsou výroky *ekvivalentní*. Odtud název ekvivalentní úprava.

Řešením rovnice jsme získali inverzní funkci k funkci[3]

$$f : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - 2x}, \quad x \in (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty) \tag{3.11}$$

Touto inverzní funkcí je[4]

$$f^{-1} : y \mapsto \frac{y^2}{4y-2}, \quad y \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty)$$

Našim dalším cílem je načrtnout grafy funkce f i inverzní funkce f^{-1}.

Začneme inverzní funkcí f^{-1}. V minulé kapitole jsme spočítali limity jejího rozšíření na množinu $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

$$g : y \mapsto \frac{y^2}{4y-2}$$

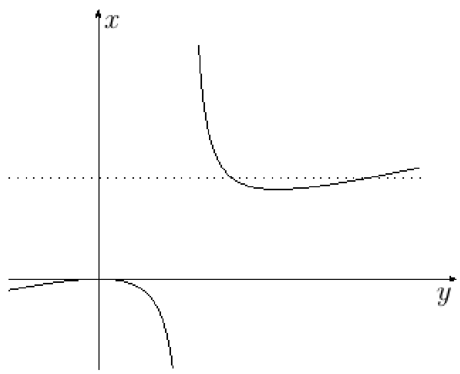
a vynesli je do grafu. Vlevo dole jsme ho znovu nakreslili a tečkovanou přímkou znázorňili, že funkce g není prostá. Inverzní funkce f^{-1}, která je zúžením funkce g, prostá je. Pojďme vytvořit její graf.

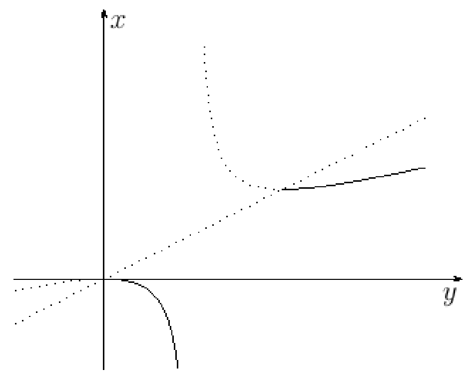
Definiční obor funkce f^{-1} jsme získali z podmínky $y \leq 2x$. Na obrázku vpravo jsme tuto podmínku vyřešili graficky a řešení znázornili plnou čarou.

[2] Vyřešení této nerovnice necháme na čtenáři.

[3] Definiční obor jsme určili z podmínek – odmocňujeme jen nezáporná čísla.

[4] Zde jsou definičním oborem ta y, pro něž má rovnice $y = f(x)$ řešení.

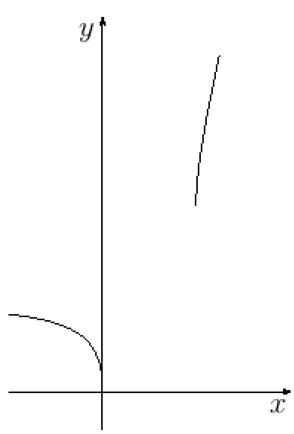


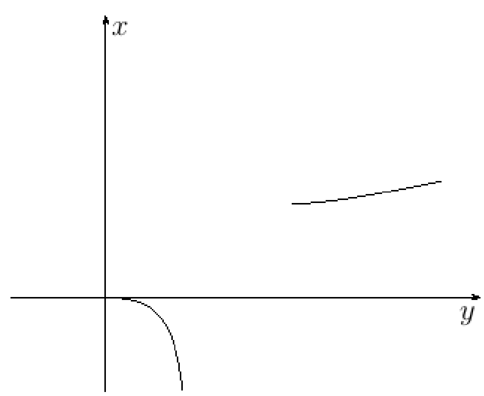


Sestrojený graf inverzní funkce lze považovat za plnohodnotný graf funkce f – pokud se v něm jako v grafu funkce f dokážeme orientovat. To si ověříme v následujícím cvičení.

Úkol. Zvolte v grafu funkce f^{-1} bod na ose x a na ose y vyznačte pro toto x hodnotu $f(x)$.

Pokud se vám nelíbí prohozené osy, můžete je vyměnit zpět. Na následujících obrázcích je vlevo graf funkce f a vpravo graf funkce k ní inverzní.[5]



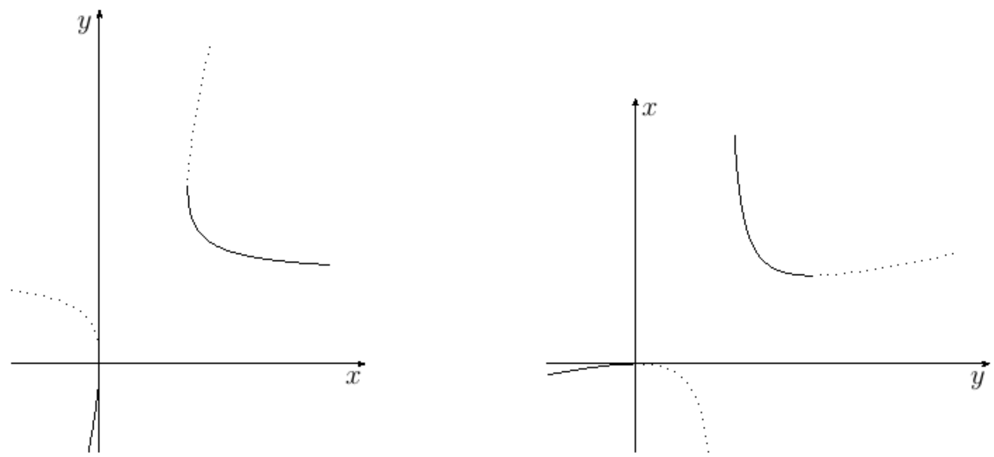


Úkol. Vyřešte stejnou úlohu pro funkci h s opačným znaménkem před odmocninou

$$h : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2 - 2x}$$

[5]Pokud funkce f přiřadí proměnné x proměnnou y, pak inverzní funkce přiřadí naopak proměnné y proměnnou x. Na základních a středních školách je zpravidla vyžadováno u inverzní funkce přejmenování, my je zde neděláme, považujeme je za nepřínosné a naopak spíše matoucí.

a ukažte, že se liší jen znaménkem levé strany L před umocněním rovnice, a tedy graf funkce h a funkce h^{-1} k ní inverzní je[6]



[6]tečkovaně jsou zakresleny grafy funkcí f, f^{-1}

Kapitola 4

Čísla

Na webu je samostatný text o číslech, který sem bude po přepracování vložen. Najdete ho v adresáři kap.fp.tul.cz/∼simunkova/an1-2017-18/1-Cisla a lze se k němu proklikat přes archiv starších ročníků, na který je na webu dole odkaz.

Následující články doplňují, co v něm chybí.

V úvodním článku pojednáme o racionálních číslech.

V následujícím rozebereme podrobněji bod 5 zabývající se reálnými čísly. Budeme vycházet z textu [2] a odkazovat se na něj. Některé jeho partie podrobněji rozebereme.

4.1 Racionální čísla

Zamyšlení. Co je to racionální číslo?

Pokud odpovíte, že zlomek, je třeba říct, co tím myslíte. Je $\pi/2$ zlomek? Pokud ano, je $\pi/2$ racionální číslo? Pokud ne, tak co je to zlomek?

V [1] je popisována tzv. první krize matematiky ve starověkém Řecku. Řečtí učenci věřili, že je každá dvojice úseček *souměřitelná*, což znamená, že jsou jejich délky celistvým násobkem určité společné jednotkové délky. Označíme-li tuto základní délku d a má-li první úsečka délku m-násobnou, tedy md a druhá úsečka délku n-násobnou, tedy nd, pak je poměr délek obou úseček roven m/n.

Pokud by tedy byla každá dvojice úseček souměřitelná, pak zvolíme některou úsečku jako jednotkovou a každá další má délku rovnu poměru dvou celých čísel. Takový podíl nazýváme *racionálním číslem*. Racionální od slova *ratio*, neboli podíl. Význam slova racionální, česky rozumný, je pravděpodobně odvozen právě od slova ratio a víry v rozumnost délek vyjádřených poměrem.[1]

Krize matematiky přišla s objevem, že úhlopříčka čtverce o jednotkové straně má délku odmocnina ze dvou a ta není racionálním číslem.

Věta o odmocnině. Odmocnina ze dvou není racionální číslo.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že naše tvrzení neplatí, tedy že existují přirozená čísla m, n splňující $(m/n)^2 = 2$ a odvodíme spor, tedy něco, co nemůže být pravda. Odtud usoudíme, že náš výchozí předpoklad nemůže platit, a tedy platí tvrzení věty.

O číslech m, n budeme navíc předpokládat, že nejsou obě sudá. Pokud by byla obě sudá, tak bychom ve zlomku m/n pokrátili dvěma nebo vhodnou mocninou dvou a dostali zlomek, který nemá i čitatele i jmenovatele sudého.

Ze vztahu $(m/n)^2 = 2$ po úpravě odvodíme $m^2 = 2n^2$. Protože je pravá strana sudá, musí být sudá i levá strana. Odtud plyne, že je m sudé. Kdyby nebylo sudé, tedy bylo liché, tedy bychom ho mohli zapsat ve tvaru $m = 2k-1$ s přirozeným k, pak by bylo $m^2 = 4(k^2 - k) + 1$, a tedy by m^2 bylo liché.

Víme tedy, že je m sudé. Proto ho můžeme zapsat pomocí přirozeného l ve tvaru $m = 2l$. Odtud je $m^2 = 4l^2$. Dosazením do $m^2 = 2n^2$ dostaneme $4l^2 = 2n^2$, pokrátíme na $2l^2 = n^2$ a stejnou úvahou jako výše odvodíme, že je n sudé. A to je slibovaný spor a důkaz zde končí. □

4.2 Vlastnosti reálných čísel

Máme na mysli vlastnosti (1) až (13) vypsané v [2] na stranách 20, 21 a 25. Poznamenejme, že jsou zde vlastnosti nazývány axiomy. Budeme tato slova[2] zaměňovat, protože nepředpokládáme, že čtenář zná rozdíl mezi nimi. Dokonce zatím rezignujeme na snahu tento rozdíl vysvětlit. Omezíme se na diskuzi ve třídě, ze které snad nějaké vysvětlení vzejde. Konstatujme jen, že pochopit, čím se liší, je těžké, nicméně čtenář mající ambici pochopit, čím se liší matematika od pouhého počítání, by měl o rozdílu přemýšlet.

---

[1] Přiznávám, že si tento příběh víceméně domýšlím. Možná jsem někdy dřív něco takového někde četla, ale nedokážu si vzpomenout kde. Poznámkou o ratiu a racionalitě se snažím motivovat studenty zapamatovat si definici racionálního čísla. Občas se zděšením zjistím, že s tím mají problém. A tak se kvůli tomu dopouštím bájení.

[2] Slova vlastnosti a axiomy.

Vlastnosti (1) až (9) jsou čtenáři dobře známé. Ukážeme na příkladu, jak je používáme při řešení rovnic.

Příklad. Ze vztahu mezi proměnnými $xy + 2x + y = 5$ chceme vyjádřit proměnnou y v závislosti na proměnné x.

Vztah (2), asociativitu sčítání, jsme použili k vypuštění závorek, které nyní doplníme: $xy + (2x + y) = 5$.
Použijeme (1), komutativitu sčítání: $xy + (y + 2x) = 5$.
Použijeme (2), asociativitu sčítání: $(xy + y) + 2x = 5$.
Použijeme (7), existenci jednotkového prvku: $(xy + y \cdot 1) + 2x = 5$.
Použijeme (5), komutativitu násobení: $(xy + 1 \cdot y) + 2x = 5$.
Použijeme (9), distributivní zákon: $(x + 1)y + 2x = 5$.
Použijeme (4), existenci opačného prvku k $2x$: $(x + 1)y + 2x + (-2x) = 5 + (-2x)$. Na levé straně jsme nenapsali závorky – použili jsme asociativitu sčítání.
Použijeme (4), vlastnost opačného prvku: $(x + 1)y + 0 = 5 + (-2x)$.
Použijeme (3), vlastnost nulového prvku: $(x + 1)y = 5 + (-2x)$.
Použijeme (5), komutativitu násobení: $y(x + 1) = 5 + (-2x)$.

Nyní bychom rádi použili (8), vlastnost inverzního prvku k $x + 1$. To můžeme udělat v případě $x + 1 \neq 0$, tedy pro $x \neq -1$.
Dostaneme $y(x + 1)(x + 1)^{-1} = (5 - 2x)(x + 1)^{-1}$.

Použijeme (8), vlastnost inverzního prvku: $y \cdot 1 = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$.

Použijeme (7), vlastnost jednotkového prvku: $y = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$.

Pro $x = -1$ vyřešíme rovnici $y(x + 1) = 5 + (-2x)$ dosazením: $0 = 7$.

Závěr:
Pro $x = -1$ nemá rovnice žádný kořen[3].
Pro $x \neq -1$ má jeden kořen $y = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$.

Poznámka o odčítání a dělení. Všimněte si, že vlastnosti se týkají pouze operací sčítání a násobení. Operace odečítání a dělení jsou skryté v axiomech opačného a inverzního prvku. Odečítání $a - b$ je zkrácený zápis pro součet $a + (-b)$. Dělení a/b je zkrácený zápis pro součin ab^{-1}.

V příkladu bychom pak místo $y = (5 + (-2x))(x + 1)^{-1}$ napsali $y = (5 - 2x)/(x + 1)$. V dalším textu budeme tento zápis používat.

Poznámka o umocňování. Další operací odvozenou od násobení jsou mocniny s přirozeným exponentem. Viz následující definice.

[3] Někdy říkáme, že rovnice nemá řešení.

Definice. Nechť je $a \in \mathbb{R}$. Pod symbolem a^1 budeme rozumět číslo o hodnotě a, tedy $a^1 = a$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ budeme pod symbolem a^n rozumět číslo o hodnotě $a^{n-1}a$, tedy $a^n = a^{n-1}a$.

Úkoly.

1. Rozmyslete si, jak z výše uvedené definice plynou vám známé vztahy $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$, $\ldots$.

2. Odvoďte z axiomů vzorce $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Na příkladu nerovnice ukážeme použití vlastností (12).

Příklad. Chceme vyřešit nerovnici $3x + 4 < 0$.
Použijeme první vztah vlastnosti (12), úpravu nerovnosti přičtením čísla -4 k oběma stranám. Dostaneme: $3x < -4$.
Použijeme druhý vztah vlastnosti (12), vynásobení nerovnosti kladným číslem 3^{-1}. Dostaneme: $x < -4/3$.

Poznámka o algebraických strukturách. V algebře budete probírat algebraické struktury – množiny s operacemi. Důležitou roli bude hrát struktura zvaná *těleso*[4], jehož typickými příklady jsou racionální, reálná a komplexní čísla s operacemi sčítání a násobení. Těleso budete definovat jako množinu se dvěma operacemi, které splňují vlastnosti (1) až (9).

Poznamenejme ještě, že na množině komplexních čísel není definováno uspořádání, proto pro ně nemá smysl uvažovat vlastnosti (10) až (12). Množina racionálních čísel tyto vlastnosti má.

Reálná a racionální čísla se liší až vlastností (13), se kterou se nejspíš čtenář teprve seznamuje a která je náročná na pochopení. Nazýváme ji vlastností supréma a budeme se jí zabývat v článku 4.4.

V následujícím článku se budeme zabývat dalšími vlastnostmi reálných čísel a ukážeme, že plynou z axiomů (1) až (12).

Poznámka o číslech a názvech. Čtenář by měl být schopný se zmiňovanými vlastnostmi pracovat. Užitečné je pamatovat si jejich názvy a zbytečné pamatovat si jejich čísla. Zde jsme čísla použili jen kvůli snažší dohledatelnosti v [2]. V dalším textu budeme místo čísel používat názvy.

[4] V [2] je těleso nazýváno polem.

Poznámka o podrobnosti odvozování a důkazů. Předchozí příklady jsme udělali velmi podrobně. Chtěli jsme ukázat, jak obvyklé úpravy rovnic a nerovnic souvisí s axiomy reálných čísel. V dalším budeme stručnější, především proto, abychom výklad příliš „nezahltili“ podrobnostmi. Vždy by však bylo dobré, kdyby čtenář uměl v případě potřeby takové vysvětlení až na axiomy provést. Zvláště takový rozbor doporučujeme v případě pochybností o platnosti použitého nebo odvozeného.

Při kompromisu mezi stručností a přehledností na jedné straně a pečlivostí a úplností na straně druhé se vždy řídíme cílovou čtenářskou skupinou. Proto je potřeba, aby studenti dávali autorce zpětnou vazbu a nebáli se říct, které partie textu jsou pro ně málo srozumitelné.

4.3 Další vlastnosti reálných čísel

V [2] je ve tvrzení 1.3.1 uvedeno i s důkazem pravidlo sčítání nerovností. My zde uvedeme pravidlo násobení nerovností.

Lemma o násobení nerovností. Nechť pro kladná čísla a, b, c, d platí $a < b$, $c < d$. Pak platí $ac < bd$.

Důkaz. Vynásobíme nerovnost $a < b$ číslem c: $ac < bc$. Nerovnost $c < d$ vynásobíme číslem b: $bc < bd$.

Na nerovnosti $ac < bc$, $bc < bd$ použijeme tranzitivitu (vlastnost 11). Dostaneme $ac < bd$. □

Z pravidla o násobení nerovností plyne pravidlo o umocňování nerovností, jak ukazuje následující lemma.

Lemma o umocňování nerovností. Nechť pro kladná čísla a, b platí $a < b$ a nechť je $n \geq 2$ přirozené číslo. Pak platí $a^n < b^n$.

Důkaz. Použijeme předchozí lemma a vynásobíme nerovnost $a < b$ samu se sebou. Dostaneme $a^2 < b^2$, tedy závěr[5] lemmatu pro $n = 2$.

Vynásobením nerovnosti $a < b$ s nerovností $a^2 < b^2$ dostaneme nerovnost $a^3 < b^3$, tedy závěr lemmatu pro $n = 3$.

Dalším krokem by bylo vynásobení nerovnosti $a < b$ s $a^3 < b^3$ ... a takto bychom mohli postupovat libovolně dlouho.

Můžeme to zkrátit tím, že vynásobíme nerovnost $a < b$ nerovností $a^n < b^n$. Dostaneme nerovnost $a^{n+1} < b^{n+1}$. Ukázali jsme tím, že z platnosti závěru

[5] O předpokladu a závěru se čtenář dočte více v následující poznámce.

lemmatu pro n plyne jeho platnost pro $n+1$. Tomu říkáme *indukční krok* a tento způsob důkazu nazýváme *důkazem matematickou indukcí*.[6] □

Poznámka o předpokladu a závěru. Předchozí lemma bylo zformulováno jako implikace: jestliže platí $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pak platí $a^n < b^n$.

Výrok $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ nazýváme *předpokladem* lemmatu, výrok $a^n < b^n$ *závěrem* lemmatu.

Čárky ve výroku $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ chápeme jako konjunkce $\wedge$ („a zároveň").

Poznámka o matematické indukci. Důkaz *matematickou indukcí* používáme na tvrzení o přirozených číslech. Skládá se ze dvou částí. V jedné části ukážeme platnost tvrzení pro nejmenší číslo, ve druhé takzvaný *indukční krok*. V indukčním kroku předpokládáme platnost tvrzení pro n a dokazujeme jeho platnost pro $n+1$.

Nejmenší číslo je zpravidla $n = 1$, ale pokud chceme nějaké tvrzení dokázat třeba pro $n \geq 5$, pak je nejmenším číslem $n = 5$.

V [2] si může zvídavý čtenář přečíst o matematické indunkci na stranách 27 až 32.

Čtenář jistě ví, že při násobení nerovnosti záporným číslem se obrací smysl nerovnosti. Zformulujeme a dokážeme tuto vlastnost.

Lemma o násobení nerovnosti záporným číslem. Nechť je $a < b$, $c < 0$. Pak je $ac > bc$.

Důkaz. K nerovnosti $c < 0$ přičteme opačný prvek $-c$. Dostaneme $0 < -c$. Nerovnost $a < b$ vynásobíme kladným číslem $-c$. Dostaneme $a(-c) < b(-c)$.

Níže ukážeme pomocné tvrzení: $a(-c) = -(ac)$. Pak platí i $b(-c) = -(bc)$. Přepíšeme tedy $a(-c) < b(-c)$ na $-(ac) < -(bc)$. K nerovnosti postupně přičteme ac, bc. Dostaneme $bc < ac$.

Dokažme ještě pomocné tvrzení. K důkazu $a(-c) = -(ac)$ stačí ukázat[7], že $a(-c) + ac = 0$. Tady stačí použít na úpravu levé strany rovnosti distributivitu. Dostaneme $a(-c+c) = 0$, což plyne z vlastnosti opačného prvku a z dalšího pomocného tvrzení – cokoliv vynásobíme nulou, dostaneme nulu. □

Poznámka o pomocných tvrzeních a stavbě důkazů. Předchozí důkaz by byl přehlednější, kdybychom lemmatu o násobení nerovnosti záporným

[6] O důkazu matematickou indukcí více v následující poznámce.

[7] Viz vlastnost opačného prvku.

číslem předřadili další dvě lemmata a pak se na ně v důkazu odkázali. Tato lemmata by tvrdila:

1. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 0 = 0$.
2. Pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{R}$ platí $(-a)b = -(ab)$.

V [2] si na straně 22 přečtěte definici neostré nerovnosti. Dokážeme pro ni pravidlo o násobení nerovností.

Lemma o násobení neostrých nerovností. Nechť pro nezáporná reálná čísla a, b, c, d platí $a \leq b$, $c \leq d$. Pak platí $ac \leq bd$.

Důkaz rozdělíme na několik případů. Rozmyslete si, že pokrývají všechny možnosti v předpokladech lemmatu.[8]

1. a, b, c, d jsou kladná, $a < b$, $c < d$
   z lemmatu o násobení nerovností plyne $ac < bd$, a tedy i $ac \leq bd$
2. a, b, c, d jsou kladná, $a = b$, $c < d$
   z lemmatu o násobení nerovnosti $c < d$ kladným číslem a plyne $ac < bd$, a tedy i $ac \leq bd$
3. a, b, c, d jsou kladná, $a = b$, $c = d$
   pak je $ac = bd$, a tedy i $ac \leq bd$
4. b nebo d je rovno nule
   z $b = 0$ plyne $a = 0$, a tedy $ac = 0 = bd$, a tedy i $ac \leq bd$; podobně pro $d = 0$
5. b a d jsou kladná a a nebo c je rovno nule
   vynásobíme nerovnost $b > 0$ kladným d a dostaneme $bd > 0$; protože je $ac = 0$, je $bd > ac$, a tedy i $bd \geq ac$

$\square$

V lemmatu o umocňování nerovností jsme dokázali implikaci: jestliže platí $a < b$, pak platí $a^n < b^n$. Ve skutečnosti za uvedených předpokladů (a, b jsou nezáporná čísla) platí ekvivalence. Tu nyní dokážeme.

Lemma o umocňování coby ekvivalentní úpravě. Pro přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a nezáporná reálná čísla a, b je $a < b$ ekvivalentní s $a^n < b^n$.

[8] Viz poznámka o předpokladu a závěru.

Poznámka o specifickém matematickém jazyku. Lemma jsme zformulovali pokud možno jazykem, kterým se běžně vyjadřujeme. Domníváme se, že v tomto případě to nebylo na újmu přesnosti vyjádření. V matematických textech se spíše používá následující jazyk: „nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní $a < b$, $a^n < b^n$“. Při tvrzeních složitějších než je toto lemma je kvůli přesnosti takový jazyk nezbytností.

Důkaz lemmatu o umocňování coby ekvivalentní úpravě. Ekvivalenci dokazujeme jako dvě implikace. Implikaci $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ jsme dokázali výše v lemmatu o umocňování nerovností.

Dokážeme implikaci $a^n < b^n \Rightarrow a < b$ obměnou,[9] tedy dokážeme implikaci $a \geq b \Rightarrow a^n \geq b^n$. Pokud je $a = b$, pak je $a^n = b^n$, a tedy je $a^n \geq b^n$. Pokud je $a > b$, pak je $a^n > b^n$, a tedy je $a^n \geq b^n$. □

Poznámka o implikaci, jejím předpokladu a závěru.
V implikaci $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ nazýváme výrok $a > b$ předpokladem, výrok $a^n > b^n$ závěrem.

Všimněte si, že oslabením závěru nepřestává implikace platit – z platnosti $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ přímo plyne platnost $a > b \Rightarrow a^n \geq b^n$.

Na druhé straně oslabením předpokladu v platné implikaci můžeme dostat neplatné tvrzení. Implikace $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ platí, ale implikace $a \geq b \Rightarrow a^n > b^n$ neplatí.[10]

Úkol. Všímejte si, jaké další vlastnosti reálných čísel používáte a odvoďte je z axiomů.

4.4 Supremum, infimum

Seznamte se z definicí horního odhadu, maxima, dolního odhadu a minima množiny v [2], definice 1.3.4, poznámka 1.3.5.

TODO PŘÍKLADY (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

[9] Implikaci „jestliže neplatí B, pak neplatí A“ nazýváme *obměněnou implikací* k „jestliže platí A, pak platí B“. Například: „jestliže máte z předmětu zkoušku, pak máte z předmětu i zápočet“ a „jestliže nemáte z předmětu zápočet, pak z něj nemáte ani zkoušku“. Srovnejte s *obrácenou implikací* „jestliže máte z předmětu zápočet, máte z něj i zkoušku“. Více viz kapitola o jazyku matematiky.

[10] Pokud se rádi s přáteli přete o rozličných tématech, dávejte pozor, zda tyto zásady o oslabení/zesílení předpokladu a závěru v diskuzi vy nebo vaši přátelé dodržujete.

Definice 1.3.6 – zdola omezená množina, shora omezená množina, omezená množina.

Definice 1.3.8 – supremum, infimum množiny.

TODO PŘÍKLADY (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Lemma o supremu a infimu „oddělených“ množin. Pokud pro dvě množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$ platí

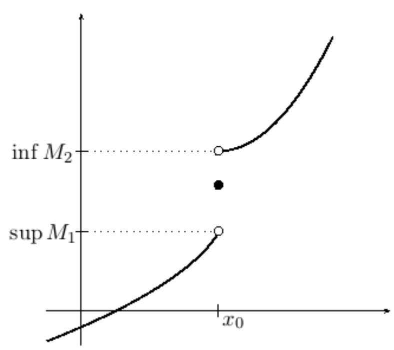
$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$$

pak platí $\sup A \leq \inf B$.

Doporučení: před čtením důkazu nakreslete číselnou osu a několik prvků množiny A i B splňujících uvedenou vlastnost.

Důkaz. Uvažujme libovolné $b \in B$. Z předpokladů lemmatu plyne, že b je horní závorou množiny A. Supremum množiny A je nejmenší horní závora, a proto platí $b \geq \sup A$ a platí to pro všechna $b \in B$. Odtud plyne, že $\sup A$ je dolní závora množiny B a odtud plyne $\sup A \leq \inf B$, protože infimum je největší dolní závora. □

Ukážeme si dva případy použití lemmatu.



Uvedený obrázek je z kapitoly věnované limitám funkcí, kde ukazujeme existenci jednostranných limit monotonních funkcí. Na obrázku je graf rostoucí funkce. Nás budou zajímat množiny M_1, M_2 pro malé kladné δ

$$\begin{aligned} M_1 &= \{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\} \\ M_2 &= \{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\} \end{aligned}$$

Je-li funkce f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rostoucí, pak platí

$$(y_1 \in M_1, y_2 \in M_2) \Rightarrow y_1 < y_2$$

a z lemmatu o supremu a infimu oddělených množin plyne

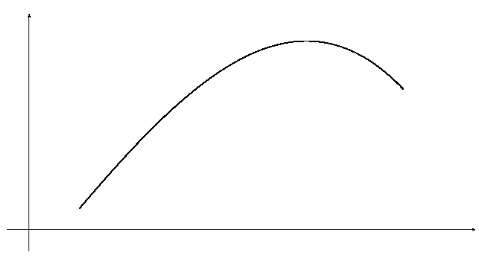
$$\sup M_1 \leq \inf M_2 \tag{4.1}$$

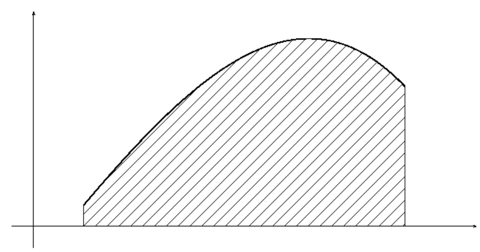
Na obrázku jsou hodnoty $\sup M_1$, $\inf M_2$ vyznačeny na ose y a nerovnost je znázornněna jejich vzájemnou polohou.

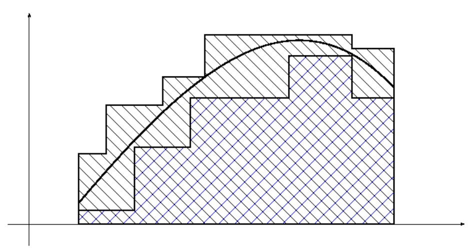
V tomto příkladě můžeme místo lemmatu o supremu a infimu oddělených množin použít hodnotu $f(x_0)$, která je horní závorou množiny M_1 a dolní závorou množiny M_2. Odtud plyne $\sup M_1 \leq f(x_0)$ a $\inf M_2 \geq f(x_0)$ a tedy i nerovnost (4.1).

Otázka. Z čeho plyne výše uvedené tvrzení, že je $f(x_0)$ horní závorou množiny M_1 a dolní závorou množiny M_2?

Další dva obrázky se týkají *Riemannova integrálu.* Ten je pro kladnou funkci definován jako obsah plochy[11] pod jejím grafem. Na obrázku vlevo je graf funkce a k němu je na obrázku vpravo vyšrafovaná plocha pod ním.







Její obsah odhadneme zdola a shora obsahem plochy, jejíž obsah umíme spočítat. Jsou to mnohoúhelníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami, jejich příklady vidíte na obrázku vlevo.

Obsah obdélníků pod grafem (jsou vyšrafovány modře) nazýváme *dolním Riemannovým integrálním součtem.* Obsah obdélníků nad grafem nazýváme *horním Riemannovým integrálním součtem.* Libovolný dolní integrální součet je nejvýše roven hornímu integrálnímu součtu.

Odtud a z lemmatu pak plyne, že supremum dolních integrálních součtů je nejvýše roven infimu horních integrálních součtů. Pokud se sobě rovnají, budeme jejich společnou hodnotu nazývat *riemannovým integrálem* zadané funkce na zadaném intervalu. Ukážeme si, že spojité omezené funkce mají na omezeném intervalu Riemannův integrál. Ukážeme si ale také příklad funkce, jejíž dolní Riemannův integrál je menší než horní Riemannův integrál. Tato

[11] Terminologická poznámka: na střední škole se zpravidla rozlišuje mezi *plochou* a jejím *obsahem.* Plocha je množina, například čtverec a obsah je číslo. Ve vysokoškolských učebnicích je běžné termínem plocha označovat její obsah, tedy číslo. My se v textu budeme držet středoškolské terminologie.

funkce tedy nemá Riemannův integrál.

Kapitola 5

Derivace funkce

Pro studium derivace funkce odkážeme čtenáře na [2]. Budeme stručně komentovat, co čtenáři doporučujeme v [2] přečíst. Některé partie zde vyložíme zjednodušeně. A především budeme vykládanou látku ilustrovat na obrázcích.

Následující odstavec je z kapitoly o limitách, strana 116.

Limitní přechod se vyskytuje i v reálných situacích: např. projede-li auto dráhu 1 km za 1 minutu, pak jelo *průměrnou* rychlostí 60 km/hod. Zkracujeme-li měřený úsek, vypočtené hodnoty se blíží údaji na tachometru, tj. jakési *okamžité* rychlosti. Zde se vyskytuje limitní proces, který je součástí definice okamžité rychlosti. Matematizace tohoto procesu byla velmi obtížná a trvala dlouhou dobu. Během ní se pracovalo s limitami posloupností i funkcí pouze intuitivně.

V článku 5.1 na str. 133 – 137 naleznete pokračování této motivace, definici derivace, vztah derivace a spojitosti a několik příkladů. Věta 5.1.10 o spojitosti funkce v bodě, ve kterém má konečnou derivaci je důležitá, ale považujeme její formulaci i důkaz za dostatečně jednoduchý, abychom čtenáře odkázali na její znění v [2].

K další motivaci pojmu derivace doporučujeme čtenáři shlédnout výklad okamžité rychlosti na webu Khanovy akademie
`https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-differentiation-1-new/ab-2-1/v/newton-leibniz-and-usain-bolt`,
nebo si klikněte na odkaz na webu předmětu na
`https://kap.fp.tul.cz/~simunkova/`.

V článku 5.2 až k větě 5.2.5 jsou odvozena pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu, je uvedena souvislost mezi existencí jednostranných derivací a spojitostí funkce, odvozena derivace konstantní funkce. Také na tuto důležitou část odkážeme čtenáře a nebudeme se jí věnovat.

Věta 5.2.6 a poznámka 5.2.7 jsou uvedeny pro elegantní a korektní důkaz věty 5.2.8 o derivaci složené funkce. Zjednodušenou (a méně korektní) verzi tohoto důkazu uvedeme v článku 5.7.1.

Příklad 5.2.10 a poznámka 5.2.11 jsou důležité pro pochopení složitějších pojmů jako aproximace funkce a derivace funkce více proměnných, proto se jimi budeme poměrně podrobně zabývat v článcích 5.5.3, 5.5.4. Uvedeme zde několik obrázků k ilustraci probíraných pojmů.

V 5.2.12 je uvedena definice tečny. Je v ní několik chyb – nutno podotknout, že jsou výjimkou – text je jinak téměř bezchybný. V úvodním vztahu má být na levé straně $g(y)$ – tedy proměnná y místo proměnné x. Ještě víc zmatečná je rovnice přímky na následujícím řádku – možná náprava je nahrazení x za x_0, a y na pravé straně za x. My se budeme více věnovat rovnici tečny v článku 5.5.

Lemma 5.2.13 je důležité pro tvrzení o derivaci a průběhu funkce. My ho uvádíme se stejným důkazem podrobně rozebraným a opatřeným obrázkem v článku 5.3.

K větám o střední hodnotě 5.2.16, 5.2.18 uvádíme v článku 5.4 obrázky. Větě 5.2.14 o Darbouxově vlastnosti derivace se v tomto textu nebudeme věnovat (zatím, možná časem přidáme článek s obrázkem).

Větu 5.2.22 o derivaci a monotonii a její důsledek 5.2.23 uvádíme v článku 5.6. Tvrzení jsme proti textu [2] poněkud zobecnili.

Funkcí rostoucí v bodě (definice 5.2.25, věta 5.2.26, důsledek 5.2.27) se v tomto textu zabývat nebudeme.

L'Hospitalovu pravidlu (věta 5.2.28) věnujeme samostatnou kapitolu.

5.1 Definice derivace, příklady

Definice. Je-li funkce f definována v okolí bodu a a existuje-li limita

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \tag{5.1}$$

říkáme, že má funkce f v bodě a derivaci a limitu (5.1) nazýváme *derivací funkce f v bodě a* a značíme $f'(a)$.

Je-li limita (5.1) vlastní/nevlastní, mluvíme o *vlastní/nevlastní derivaci funkce f v bodě a.*

Jednostranné limity nazýváme *jednostrannými derivacemi funkce f v bodě a zprava (zleva)* a značíme je $f'_-(a)$, $f'_+(a)$

$$\begin{aligned} f'_-(a) &= \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'_+(a) &= \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

V následujících příkladech si ukážeme, jak počítat derivaci přímo z její definice. V článku (5.2) pak odvodíme vzorce pro počítání derivací.

Příklady.

1. $f: x \mapsto x^2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

2. $f: x \mapsto \sqrt{x}$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

3. $f: x \mapsto \operatorname{sgn} x$ – připomeneme, že pro $x>0$ je $\operatorname{sgn} x = 1$, pro $x<0$ je $\operatorname{sgn} x = -1$ a $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Na pravém okolí nuly budeme tedy dosazovat $\operatorname{sgn} x = 1$, na levém $\operatorname{sgn} x = -1$. Proto budeme počítat v bodě $x=0$ jednostranné derivace.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty \end{aligned}$$

Funkce sgn má tedy v bodě 0 jednostranné derivace, a protože se rovnají, má i (oboustrannou) derivaci. Tyto derivace jsou nevlastní (nekonečné).

4. $f: x \mapsto |x^2-1|$
spočítáme derivaci v bodě $a=0$: v okolí tohoto bodu je $f(x) = 1-x^2$, a tedy

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-1}{x-0} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

$a = 1$: v pravém okolí bodu 1 je $f(x) = x^2 - 1$, a tedy

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 2$$

v levém okolí bodu 1 je $f(x) = 1 - x^2$, a tedy

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x\to 0}(-x-1) = -2$$

Protože se jednostranné derivace v bodě $x = 1$ nerovnají, nemá funkce f v bodě 1 oboustrannou derivaci.

5. $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$$

Poznámky.

1. V definici derivace jsme předpokládali, že je funkce definovaná v okolí bodu a. V bodě a je definování potřeba, protože se funkční hodnota $f(a)$ v definici vyskytuje a v okolí (libovolně malém) je definování potřeba, aby byla definována limita.

2. Vztah (5.1) někdy píšeme ve tvaru

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h} \tag{5.2}$$

Podobně pro jednostranné derivace

$$\begin{aligned} f'_-(a) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'_+(a) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

a derivaci zleva případně

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Výše jsme definovali derivaci v bodě, což je číslo. Funkci, která bodu a přiřadí toto číslo nazýváme derivací funkce. Dříve, než vyslovíme definici, uavedeme několik přikladů.

Příklady.

1. $f : x \mapsto x^2$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$$

   ZÁVĚR: $f' : x \to 2x, x \in \mathbb{R}$.

2. $f : x \to |x|$
   $a > 0$: v okolí a je $f(x) = x$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = 1$$

   $a < 0$: v okolí a je $f(x) = -x$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{-(a+h) - (-a)}{h} = -1$$

   $a = 0$: v pravém okolí bodu 0 je $f(x) = x$, proto je $f'_+(0) = 1$ (výpočet je stejný jako pro $a > 0$)
   v levém okolí je $f(x) = -x$, proto je $f'_-(0) = -1$
   ZÁVĚR: $f'(x) = 1$ pro $x > 0$, $f'(x) = -1$ pro $x < 0$, v bodě $x = 0$ není f' definováno.

3. $f : x \mapsto \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$
   pro $x > 0$ počítáme limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^3} - \sqrt{x^3}}{h}$$

   zlomek rozšíříme součtem odmocnin

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h(\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3})}$$

   upravíme čitatele a pokrátíme h

$$\lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3xh + h^2}{\sqrt{(x+h)^3} + \sqrt{x^3}}$$

Výraz je spojitou funkcí proměnné h, proto spočítáme limitu dosazením. Vyjde $3x^2/2\sqrt{x^3} = 3\sqrt{x}/2$.
Pro $x = 0$ počítáme derivaci zprava buď stejnými úpravami jako nahoře nebo jednodušeji

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0$$

ZÁVĚR: funkce f má pro $x > 0$ derivaci $f'(x) = 3\sqrt{x}/2$, pro $x = 0$ má derivaci zprava rovnu nule. Můžeme ji tedy vyjádřit stejným vztahem jako pro $x > 0$.

V prvním příkladě je přirozené za derivaci funkce $f : x \mapsto x^2$ považovat funkci $f' : x \mapsto 2x$. Definiční obory funkce f a její derivace f' jsou oba $\mathbb{R}$.

V druhém příkladě má derivace funkce $f : x \mapsto |x|$ derivaci $f' : x \mapsto \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$. Definiční obory funkce a její derivace se tedy liší. Zatímco f je definovaná na $\mathbb{R}$, derivace f' jen na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ve třetím příkladě $f : x \mapsto \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$ je derivace $f' : x \mapsto 3\sqrt{x}/2$ s definičním oborem buď $(0, +\infty)$ nebo $[0, +\infty)$. Záleží na nás, pro jakou definici se rozhodneme. V [2] je v definici 5.1.13 zvolen druhý případ. Definiční obor derivace f' tvoří ty body, ve kterých má f oboustrannou vlastní derivaci a ty body, v nichž má jednu vlastní jednostrannou derivaci a druhá jednostranná derivace je buď nevlastní nebo neexistuje.

5.2 Kalkulus derivací poprvé

V článku odvodíme vzorce pro derivaci funkcí

$$x \mapsto x^n \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

Všechny tyto funkce lze zapsat jako mocninné funkce s racionálním exponentem $x \mapsto x^q$ a jejich derivace vyjde ve všech případech $(x^q)' = qx^{q-1}$.

5.2.1 Derivace mocnin a odmocnin

V článku používáme úpravy výrazů probrané v článku 7.4.

1. Konstantní funkce $f : x \mapsto C$, $x \in \mathbb{R}$.
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C-C}{h} = 0$
   ZÁVĚR: derivace konstantní funkce je nula.

2. $f : x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$
   ZÁVĚR: $(x)' = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. $f : x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
   Rada: pokud máte problém pochopit následující úpravy, dosaďte za n malé celé číslo, například 2, 3, ...
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + n(n-1)x^{n-2}h^2/2 + \cdots + h^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h/2 + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$
   ZÁVĚR: pro $n \in \mathbb{N}$ je $(x^n)' = nx^{n-1}$ s definičním oborem $x \in \mathbb{R}$.
   POZNÁMKA: pro $n = 0$ a $x \neq 0$ je $f(x) = 1$ a $f'(x) = 0x^{-1} = 0$ ve shodě s výše uvedeným výsledkem. Pro $n = 1$ je $f(x) = x$ a pro $x \neq 0$ je $f'(x) = x^0 = 0$, opět ve shodě s výše uvedeným výsledkem.

4. $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, obor pro x záleží na n – pro liché n je $x \in \mathbb{R}$, pro sudé n je $x \geq 0$
   Rada: pokud máte problém pochopit následující úpravy, dosaďte za n malé celé číslo, například 2, 3, ...
   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+h} - \sqrt[n]{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{(n-1)/n} + (x+h)^{(n-2)/n}x^{1/n} + (x+h)^{(n-3)/n}x^{2/n} + \cdots + x^{(n-1)/n}} = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}$
   ZÁVĚR: pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}$ s definičním oborem závislým na hodnotě n – pro $x = 0$ je derivace nevlastní (a pro n sudé jednostranná), pro $x \neq 0$ je derivace definovaná, pokud je definovaná odmocnina.

POZNÁMKA: formálně je vzorec pro derivaci stejný

$$(x^q)' = qx^{q-1} \quad \text{pro } q \in \mathbb{N}, 1/q \in \mathbb{N} \tag{5.3}$$

5.2.2 Derivace a aritmetické operace

Věty o derivaci a aritmetických operacích najde čtenář v [2] pod čísly 5.2.1, 5.2.4, 5.2.5.

5.2.3 Derivace mocnin ze záporným exponentem

Použijeme pravidlo pro derivaci podílu pro odvození vzorců $(x^{-n})'$, $(x^{-1/n})'$

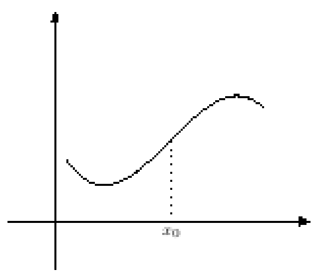
1. $f : x \mapsto 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $(\frac{1}{x^n})' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

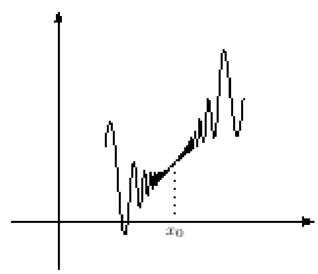
2. $f : x \mapsto 1/\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, definiční obor závisí na hodnotě n – pro sudé n je $x > 0$, pro liché n je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   $(\frac{1}{\sqrt[n]{x}})' = \frac{-x^{-1+1/n}/n}{x^{2/n}} = -\frac{1}{n}x^{-1-1/n}$

Poznámka: vzorec (5.3) tedy platí i pro záporné hodnoty $q \in \mathbb{Z}, 1/q \in \mathbb{Z}$.

5.3 Derivace a extrémy funkce

Pro zjišťování průběhu funkce má zásadní význam znaménko derivace. Na obrázcích jsou grafy funkcí, které mají v bodě x_0 kladnou derivaci. Na levém obrázku je funkce v okolí bodu x_0 rostoucí. Na obrázku vpravo rostoucí není v žádném okolí bodu x_0. Jen je v pravém okolí větší než $f(x_0)$ a v dostatečně malém levém okolí menší než $f(x_0)$. V tomto článku dokážeme, že tuto vlastnost má funkce v každém bodě, ve kterém má kladnou derivaci.





Pro bod se zápornou derivací ukážeme obdobné tvrzení s opačnými nerovnostmi. Odtud pak plyne, že v bodě, ve kterém má funkce lokální extrém nemůže mít ani kladnou ani zápornou derivaci. Tedy buď derivaci nemá nebo ji má nulovou. Tuto vlastnost zformulujeme v závěrečné větě článku.

Lemma o znaménku derivace a chování funkce v okolí bodu. Nechť má funkce f v bodě x_0 kladnou derivaci $f'(x_0) > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) < f(x_0))$$
$$(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) > f(x_0))$$

Důkaz. Na levém obrázku je graf funkce f s bodem x_0, pro nějž platí $f'(x_0) > 0$.

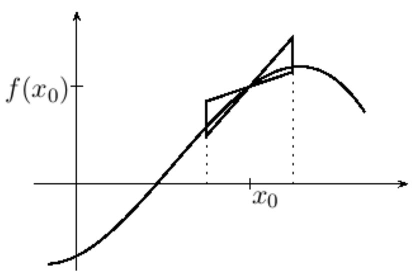
Na pravém obrázku je graf funkce g, která přírůstku h přiřadí směrnici sečny $g(h)$ s vyznačenou limitou v nule, která je rovna $f'(x_0)$.

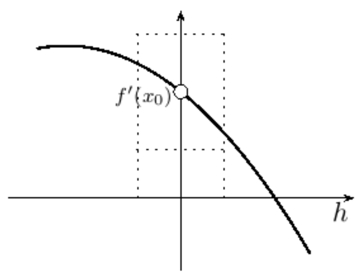
$$g : h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Dále je na pravém obrázku vyznačeno okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ ležící v intervalu $(0, +\infty)$ a jemu odpovídající okolí $\mathcal{U}_\delta(0)$ splňující

$$h \in \mathcal{U}_\delta(0) \Rightarrow g(h) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0)). \tag{5.4}$$

Krajní hodnoty okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ se na obrázku vlevo zobrazí na přímky o rovnicích $y = (f'(x_0) \pm \varepsilon)(x - x_0) + f(x_0)$. Graf funkce f na okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ leží mezi těmito přímkami a odtud plyne tvrzení lemmatu.



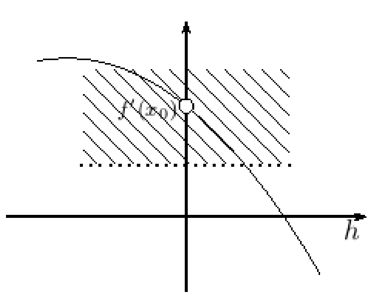


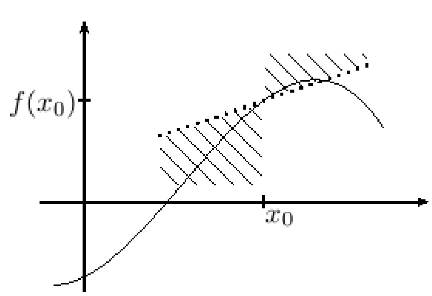
□

Poznámka. Vztah $g(h) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f'(x_0))$ z (5.4) obsahuje dvě nerovnosti. V důkazu stačí uvažovat jen jednu z nich

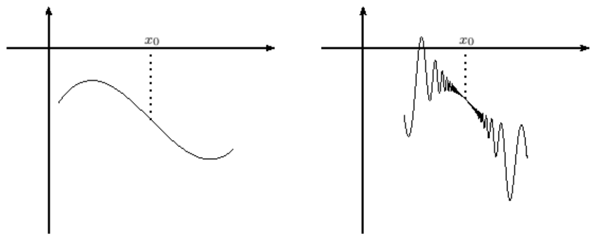
$$g(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > f'(x_0) - \varepsilon$$

znázorněnou na obrázku vlevo. Úpravou nerovnosti (vynásobením h) dostaneme pro $h > 0$: $f(x_0 + h) - f(x_0) > h(f'(x_0) - \varepsilon)$ a pro $h < 0$ opačnou nerovnost. Obojí je znázorněno na obrázku vpravo.





Přechodem k funkci $-f$ dostaneme „duální“ lemma.



Lemma. Nechť má funkce f v bodě x_0 zápornou derivaci $f'(x_0) < 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(f(x) > f(x_0))$$
$$(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(f(x) < f(x_0))$$

DŮKAZ. Použijeme předchozí lemma na funkci $-f$. Platí $-f'(x_0) > 0$, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))(-f(x) < -f(x_0))$$
$$(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))(-f(x) > -f(x_0))$$

Požadované tvrzení dostaneme vynásobením nerovností minus jedničkou. □

Přímým důsledkem lemmatu je věta o derivaci a lokalních extrémech. Uvedeme jejich definici.

Definice lokálních extrémů. Řekneme, že má funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *lokální minimum*, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) > f(x_0)).$$

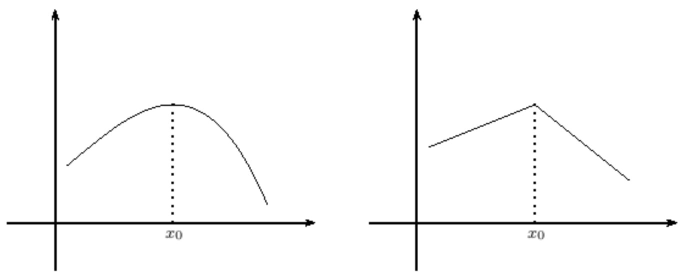
Řekneme, že má f v x_0 *lokální maximum* pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) < f(x_0)).$$

Má-li f v bodě x_0 lokální maximum nebo lokální minimum, říkáme, že má v bodě x_0 *lokální extrém*.

Věta o derivaci a extrémech. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a lokální extrém, pak je $f'(x_0) = 0$.

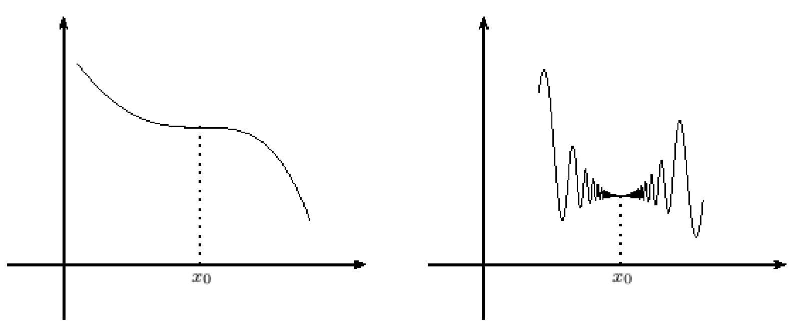
DŮKAZ. Věta je přímým důsledkem lemmat o znaménku derivace a chování funkce v okolí bodu.



Na obrázcích má funkce v bodě x_0 lokální maximum. V bodě x_0, ve kterém nabývá funkce lokálního maxima, nemůže mít ani kladnou ani zápornou derivaci. Kdyby bylo $f'(x_0) > 0$, tak by na pravém okolí muselo být $f(x) > f(x_0)$, tedy by v x_0 neměla f lokální maximum. Podobně, kdyby bylo $f'(x_0) < 0$, tak by na levém okolí muselo být $f(x) > f(x_0)$, a opět by v x_0 neměla f lokální maximum. Jsou tedy další dvě možnosti, buď je $f'(x_0) = 0$ jako na obrázku vlevo, nebo $f'(x_0)$ neexistuje, jako na obrázku vpravo. My jsme předpokládali existenci derivace v bodě x_0, proto platí $f'(x_0) = 0$.

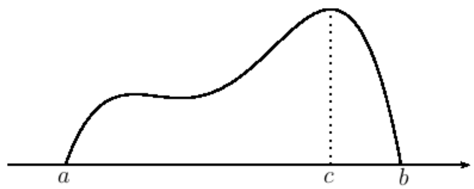
Podobné je to v případě, že má f v bodě x_0 lokální minimum. $\square$

Následující obrázky ukazují, že v bodě s nulovou derivací funkce nemusí mít lokální extrém.



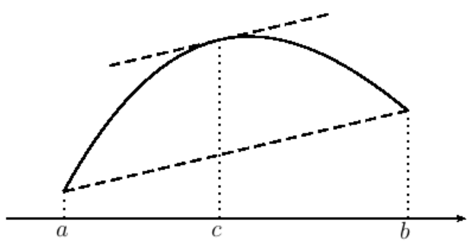
5.4 Rolleova a Lagrangeova věta

Znění a důkaz vět je v [2], 5.2.16, 5.2.18.



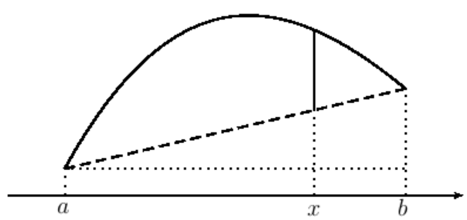
Na obrázku vlevo ilustrujeme Rolleovu větu. Funkce je na intervalu $[a, b]$ spojitá, v bodech a, b má stejnou funkční hodnotu a na intervalu (a, b) má derivaci.

Věta pak říká, že existuje $c \in (a, b)$, v němž má funkce nulovou derivaci. Důkaz věty říká, že to je v bodě, ve kterém funkce nabývá extrémní hodnoty, na našem obrázku maxima. Je třeba si rozmyslet, jak to bude obecně. Podrobnosti viz důkaz v [2].



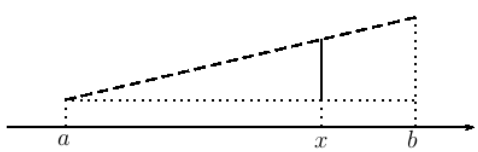
Na dalším obrázku ilustrujeme Lagrangeovu větu. Předpoklady jsou stejné jako u Rolleovy věty kromě stejných funkčních hodnot v krajních bodech intervalu.

Věta říká, že existuje bod $c \in (a, b)$, v němž má funkce derivaci rovnu směrnici sečny: $(f(b) - f(a))/(b - a)$.



Důkaz používá pomocnou funkci F, jejíž funkční hodnota je rovna rozdílu znázorněnému plnou úsečkou. Je to rozdíl funkční hodnoty a y-ové souřadnice bodu na sečně.

Další obrázek ukazuje, jak tuto y-ovou souřadnici na sečně vypočteme. Je rovna součtu délek svislých úseček – tečkované a plné.



Tečkovaná je rovna $f(a)$. Plnou spočítáme z podobnosti trojúhelníků. Dostaneme

$$y = f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Na funkci

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

Použijeme Rolleovu větu a dostaneme požadované tvrzení věty. Podrobnosti v [2].

5.5 Derivace a tečna ke grafu funkce

V tomto článku probereme jak souvisí derivace funkce s tečnou ke grafu funkce. Začneme definicí tečny a hned za ní uvedeme několik obrázků ilustrujících, že tečnu chápeme více jako aproximaci grafu než jako přímku, která se grafu dotýká. V dalších článcích se budeme podrobněji zabývat aproximačními vlastnostmi tečny a v závěrečném článku uvedeme, za jakých podmínek tečna splňuje geometrickou představu.

5.5.1 Definice tečny

Definice tečny ke grafu funkce. Nechť má funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak přímku o rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.5}$$

budeme nazývat tečnou ke grafu funkce f v bodě x_0.

Příklad. Napíšeme rovnici tečny ke grafu funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 4$. Spočítáme derivaci funkce f

$$f'(x) = 1/(2\sqrt{x}), \qquad f'(4) = 1/4$$

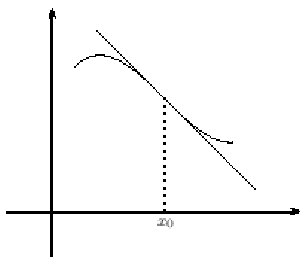
a spolu s $f(4) = 2$ dosadíme do (5.5)

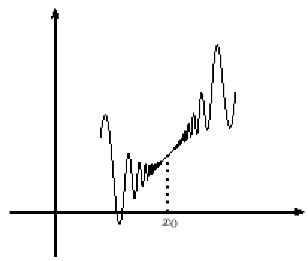
$$y = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 4)$$

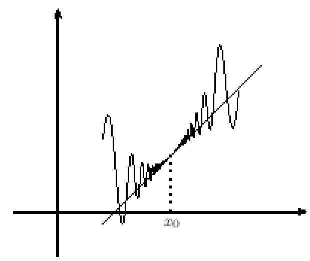
Poznámka. Mluvíme o tečně v bodě x_0 přestože geometricky má tečný bod dvě souřadnice $[x_0, f(x_0)]$. V dalším textu uvidíme, že nás bude víc než geometrie zajímat vztah funkce f a lineární funkce l, jejímž grafem je tečna. Když mluvíme o chování funkce v bodě, máme na mysli bod na ose proměnné funkce, tj. ose x.

Následující obrázky ukazují, že ne vždy výše definovaný pojem tečny naplňuje geometrickou představu tečny. Na obrázku vlevo tečna protíná graf v tečném bodě. Na dalších obrázcích tečna protíná graf v libovolně malém okolí tečného bodu dokonce nekonečněkrát. Na prostředním obrázku je samotný graf funkce, vpravo je spolu s tečnou.

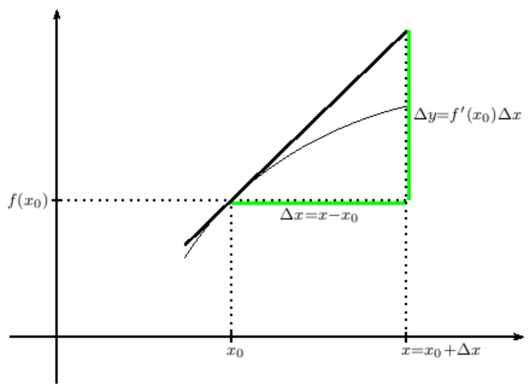
V článku 5.5.5 uvedeme k těmto obrázkům další podrobnosti.







5.5.2 Rovnice tečny a přímá úměrnost



Na obrázku je tečna s vyznačeným tečným bodem $[x_0, f(x_0)]$ a bodem $[x, y]$.
Z podobnosti trojúhelníků plyne, že přírůstek souřadnice y

$$\Delta y = y - f(x_0)$$

je přímo úměrný přírůstku proměnné x

$$\Delta x = x - x_0$$

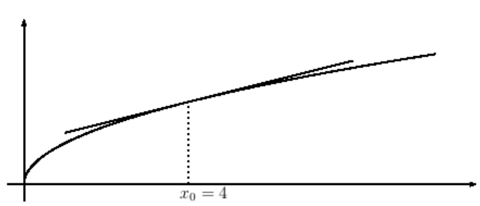
s konstantou úměrnosti $f'(x_0)$.

Tuto úměrnost zapíšeme vztahem ekvivalentním s (5.5)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

5.5.3 Tečna a lokální aproximace

Příklad. Ukážeme, jak lze rovnici tečny použít k přibližnému vyčíslení výrazu. Z rovnice tečny ke grafu funkce $f : x \mapsto \sqrt{x}$ v bodě $x = 4$ spočítáme přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$.



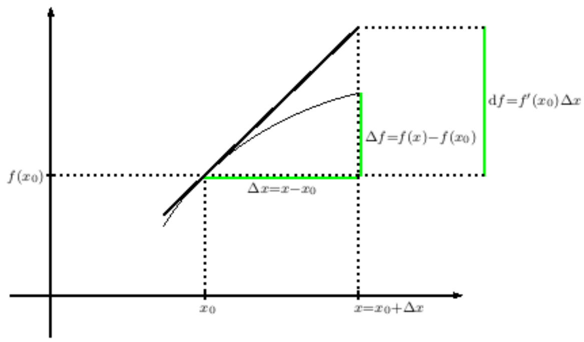
Rovnice tečny v bodě $x_0 = 4$ je

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

Pro $x = 5$ je $y = 2.25$.

Pro porovnání uvedeme přesnou hodnotu odmocniny zaokrouhlenou na setiny $\sqrt{5} \doteq 2.24$.

Na obrázku dole vysvětlíme další pojmy.



Změnu funkční hodnoty budeme nazývat *přírůstkem funkce*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

změnu na tečně budeme nazývat *lineární částí přírůstku funkce*

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\Delta x.$$

Výše uvedený výpočet využívá toho, že pro malé Δx je $\Delta f \doteq \mathrm{d}f$.

Poznámka (důležitá). Přírůstek proměnné $x - x_0$ značíme buď Δx nebo $\mathrm{d}x$. Lineární část přírůstku pak napíšeme ve tvaru

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

Tento vztah je základ diferenciálního a integrálního počtu od Newtona a Leibnize z konce 17. století. Na přírůstky $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}x$ se tehdy matematici a fyzikové dívali jako na nekonečně malé veličiny. Derivace je pak podíl těchto nekonečně malých veličin. Například pro $f(x) = x^2$ je

$$f'(x) = \frac{(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x = 2x$$

Protože je $\mathrm{d}x$ nekonečně malé, dosadíme za něj v závěru výpočtu nulu. Ale protože je nenulové, můžeme jím v počátku výpočtu dělit. Matematici se dlouhou dobu snažili precizovat tento pojem a odstranit rozpor hodnoty zároveň nulové i nenulové. Nakonec za více jak sto let dospěli k ε-δ definici spojitosti a limity. Za zmínku stojí, že s nekonečně malými hodnotami počítá tzv. nestandardní analýza. Český matematik Petr Vopěnka (1935 – 2015) byl příznivec nestandardní analýzy a považoval zavedení ε-δ definic za zásadní historickou chybu matematiké analýzy.

Vztah (5.6) často píšeme ve tvaru $f'(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Přírůstek funkce $\mathrm{d}f$ často nahrazujeme přírůstkem proměnné. Konkrétně pro pro $y = f(x)$ napíšeme $f'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. A třeba pro $s = f(t)$ napíšeme $f'(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

5.5.4 Chyba lokální aproximace

Rozdíl $\Delta f - \mathrm{d}f$ budeme nazývat *chybou lokální aproximace* funkce f lineární funkcí l v bodě x_0. Přitom grafem lineární funkce l je tečna ke grafu f v bodě x_0. Tedy předpis l je

$$l : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.7}$$

Poznámky.

1. Aproximaci nazýváme lokální proto, že je aproximace dobrá jen v okolí bodu x_0.

2. Chybu aproximace lze také zapsat jako rozdíl funkčních hodnot aproximované a aproximující funkce

$$\Delta f - \mathrm{d}f = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f(x) - l(x)$$

Uvedeme několik tvrzení o chybě aproximace. První říká, že je chyba $\Delta f - \mathrm{d}f$ zanedbatelná ve srovnání s Δx.

Lemma o chybě lokální aproximace. Nechť má funkce f v bodě x_0 konečnou derivaci. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = 0$$

Důkaz. Dosazením za $l(x)$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

□

Druhé tvrzení říká, že jiná lineární funkce tuto vlastnost nemá.

Lemma o lokální aproximaci lineární funkcí. Nechť pro funkci f, bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{5.8}$$

Pak má funkce f v bodě x_0 derivaci a ta je rovna A, tedy platí $f'(x_0) = A$.

DŮKAZ. Vztah (5.8) upravíme na

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = 0$$

odkud plyne existence derivace $f'(x_0)$ a rovnost $f'(x_0) = A$. $\square$

Obě lemmata shrneme do jednoho.

Lemma. Mějme funkci f a bod x_0. Pak pro $A \in \mathbb{R}$ platí (5.8) právě když je $A = f'(x_0)$.

DŮKAZ. Máme dokázat ekvivalenci, kterou dokazujeme jako dvě implikace, a ty jsou dokázány v předchozích lemmatech. $\square$

Předchozí tvrzení říkají, že při zmenšujícím se $x - x_0$ se chyba zmenšuje rychleji. Další tvrzení umožní chybu přesněji kvantifikovat pomocí hodnot druhé derivace. Druhá derivace je derivací derivace, tedy $f'' = (f')'$.

Věta o chybě lineární aproximace. Má-li funkce f v okolí bodu x_0 druhou derivaci a bod x leží v tomto okolí, přitom $x \neq x_0$, pak mezi body x a x_0 leží bod c takový, že pro chybu lineární aproximace

$$R(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

platí

$$R(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2.$$

DŮKAZ. Pro chybu $R(x)$ platí $R(x_0) = 0$, $R'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Použijeme Rolleovu větu na funkci

$$F : t \mapsto (t - x_0)^2 R(x) - (x - x_0)^2 R(t),$$

pro kterou platí

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= (x_0 - x_0)^2 R(x) - (x - x_0)^2 R(x_0) = 0 \\
F(x) &= (x - x_0)^2 R(x) - (x - x_0)^2 R(x) = 0 \\
F'(t) &= 2(t - x_0) R(x) - (x - x_0)^2 (f'(t) - f'(x_0))
\end{aligned}$$

Z Rolleovy věty plyne existence c_1 ležícího mezi x a x_0 a splňujícího $F'(c_1) = 0$.

Dále platí $F'(x_0) = 0$, proto další aplikací Rolleovy věty dostaneme existenci c ležícího mezi c_1 a x_0 takového, že platí

$$F''(c) = 2R(x) - (x - x_0)^2 f''(c) = 0$$

Odtud dostaneme

$$R(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2$$

□

Příklad. Použijeme větu k odhadu chyby aproximace funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v okolí bodu 4, kterou jsme počítali výše. Spočítáme druhou derivaci

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

V bodě $x = 4$ je

$$f''(4) = -\frac{1}{32} \doteq -0.03$$

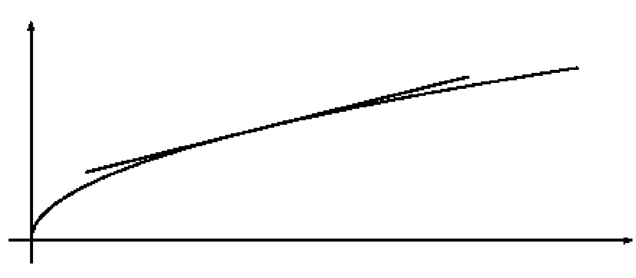
V okolí bodu 4 je $f''(c)$ také přibližně rovna -0.03 (používáme spojitost této druhé derivace). Odtud plyne pro x blízké $x_0 = 4$

$$\sqrt{x} \doteq 2 + \tfrac{1}{4}(x - 4)$$

s chybou řádově rovnou $-0.015(x - 4)^2$, pro $x = 5$ tedy řádově -0.015, což odpovídá tomu, co jsme v příkladě nahoře spočítali.

5.5.5 Tečna a geometrie

Připomeňme graf odmocniny s tečnou v bodě $x = 4$. Tečna leží v pravém i levém okolí bodu x nad grafem funkce. Souvisí to s tím, že je chyba lineární aproximace záporná: $f(x) < l(x)$, tedy $f(x) - l(x) < 0$. A to souvisí s tím, že je v okolí bodu x záporná druhá derivace f''.



Na dalším obrázku jsou grafy z počátku článku o tečnách. Předpis ke grafu vlevo je

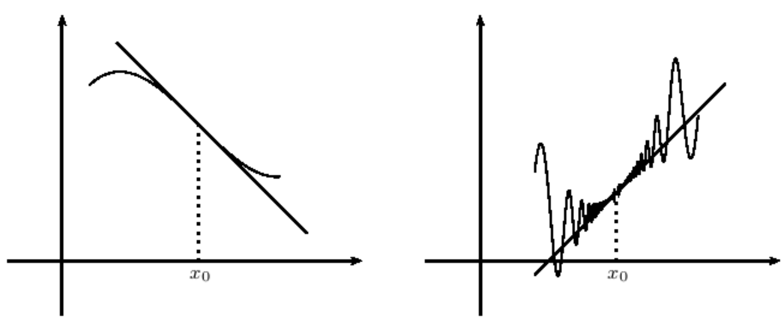
$$f : x \mapsto (x-1)^3 - x + 2$$

a $x_0 = 1$. Výpočtem dostaneme $f''(x) = 6(x-1)$. V pravém okolí bodu x_0 je druhá derivace kladná, v levém záporná. To vysvětluje, proč tečna protíná graf funkce.

Vpravo je graf spojitého rozšíření funkce

$$x \mapsto x - 0.5 + (x-1)^2(1 + 2\sin(6/(x-1))), \quad x \neq 1$$

Druhá derivace této funkce mění v libovolném okolí bodu $x_0 = 1$ nekonečněkrát znaménko.



5.6 Derivace a monotonie funkce

Věta o neklesající funkci a znaménku derivace. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je f neklesající na I právě když je f' nezáporná na I.

Důkaz. Máme dokázat ekvivalenci, budeme dokazovat dvě implikace. První implikace: je-li f' nezáporná na I, pak je f na I neklesající. Druhá implikace: je-li f neklesající na I, pak je f' na I nezáporná.

Důkaz první implikace: je-li f' nezáporná na I, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, pak z Lagrangeovy věty plyne existence $x_3 \in (x_1, x_2)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3) \geq 0,$$

odtud plyne $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ a tedy je f neklesající na I.

Místo druhé implikace dokážeme její obměnu: není-li f' nezáporná na I, pak není f neklesající na I: pokud není f' na intervalu I nezáporná, existuje $x_0 \in I$, pro něž je $f'(x_0) < 0$. Z lemmatu o znaménku derivace a chování v okolí z článku 5.3, plyne, že f není v okolí x_0 neklesající, a tedy ani není neklesající na I. □

Věta o nerostoucí funkci a znaménku derivace. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je f nerostoucí na I právě když je f' nekladná na I.

Důkaz. Stačí použít předchozí větu na funkci $-f$. □

Věta o nulové derivaci. Má-li funkce f na intervalu $I = (a, b)$ nulovou derivaci, pak je f na I konstantní.

Důkaz. Z předchozích vět plyne, že funkce f je na intervalu I neklesající a nerostoucí. Odtud plyne, že je konstantní. □

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I = (a, b)$ derivaci. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I$.

Důkaz. Opět dokážeme dvě implikace.

První implikace: nechť je f rostoucí na I. Pak z předchozí věty plyne, že má f na I nezápornou derivaci. Zbývá ukázat, že derivace f' není nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I$ – to plyne z věty o nulové derivaci a z toho, že je f rostoucí.

Opačná implikace: z předchozí věty víme, že z nezápornosti derivace plyne, že je funkce neklesající. Chceme ukázat, že je rostoucí. Rozebereme, co platí pro funkci, která není rostoucí, ale je neklesající: existují $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pro něž je $f(x_1) = f(x_2)$. Protože je f neklesající na I, je konstantní na $I_1 = (x_1, x_2)$. Odtud plyne, že má f na I_1 nulovou derivaci, a to vylučují předpoklady věty. Proto je f na I rostoucí. □

Příklad. Funkce $f : x \mapsto x^3$ má na $\mathbb{R}$ derivaci $f' : x \mapsto 3x^2$. Derivace f' je nezáporná na $\mathbb{R}$ a nulová je jen v bodě $x = 0$, tedy není nulová na žádném intervalu. Proto je f podle předchozí věty rostoucí na $\mathbb{R}$.

Poznámka. Všechny tři věty platí i pro jiné než otevřené intervaly, tedy intervaly $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ za stejných předpokladů pro derivaci na otevřeném intervalu (a, b) a případné spojitosti v krajních bodech intervalu.

Uvedeme znění poslední věty. Necháme na čtenáři ověřit, že důkazy budou stejné jako pro otevřený interval.

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace pro interval uzavřený zleva. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I_v = (a, b)$ derivaci a nechť je spojitá na intervalu $I = [a, b)$. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I_v a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I_v$.

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace pro interval uzavřený zprava. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I_v = (a, b)$ derivaci a nechť je spojitá na intervalu $I = (a, b]$. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I_v a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I_v$.

Věta o rostoucí funkci a znaménku derivace pro uzavřený interval. Nechť má funkce f na otevřeném intervalu $I_v = (a, b)$ derivaci a nechť je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je f rostoucí na I právě když je f' nezáporná na I_v a zároveň není f' nulová na žádném neprázdném otevřeném intervalu $I_1 \subset I_v$.

5.7 Kalkulus derivací podruhé

5.7.1 Derivace složené funkce

Větu o derivaci složené funkce najde čtenář v [2] pod číslem 5.2.8. K důkazu je v [2] použita pomocná Carathéodoryho funkce. My zde ukážeme hlavní myšlenku důkazu bez této funkce a řekneme, v čem je pak v důkazu problém. Pro $x \neq x_0$, $f(x) \neq f(x_0)$ platí

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme za předpokladu existence derivací napravo

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$

Problém je s výše uvedenou podmínkou a s existencí derivací. S $x \neq x_0$ problém není, protože je na prstencovém okolí bodu x_0 splněná. Druhá podmínka $f(x) \neq f(x_0)$ splněná být nemusí. To je důvod, proč je v [2] v důkazu použita Carathéodoryho funkce.

Ještě vysvětlíme, jak lze pravidlo o derivaci složené funkce zapsat pomocí nekonečně malých veličin z (5.6). Složenou funkci zapíšeme pomocí tří proměnných

$$z = g(y) \qquad y = f(x)$$

a derivace zapíšeme pomocí přírůstků

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Pravidlo pro derivaci složené funkce pak napíšeme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

5.7.2 Derivace pro ostatní racionální exponenty

Pravidlo pro derivaci složené funkce procvičíme na odvození vzorců pro derivaci mocnin s racionálním exponentem. Nechť jsou n, m kladná přirozená čísla. Pak

1. $(\sqrt[n]{x^m})' = \frac{1}{n}(x^m)^{1/n-1}(x^m)' = \frac{1}{n}x^{m/n-m}mx^{m-1} = \frac{m}{n}x^{m/n-1}$
2. $(1/\sqrt[n]{x^m})' = -(\sqrt[n]{x^m})'/(\sqrt[n]{x^m})^2 = -\frac{m}{n}x^{m/n-1}x^{-2m/n} = -\frac{m}{n}x^{-m/n-1}$

ZÁVĚR: vztah $(x^q)' = qx^{q-1}$ platí pro všechna $q \in \mathbb{Q}$. Definiční obory funkce a derivace závisí na hodnotě q. Pokud o hodnotě q nemáme žádné informace, tak jsou „bezpečné“ hodnoty pro x jen $x > 0$. Z toho důvodu je za definiční obor obecné mocninné funkce $x \mapsto x^\alpha$ zpravidla považován interval $x > 0$.

5.7.3 Derivace inverzní funkce

Složením funkce f s inverzní funkcí f^{-1} dostaneme identitu $\mathrm{id} : x \mapsto x$, která má derivaci rovnu jedné. Odtud a z pravidla pro derivaci složené funkce plyne

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

Symbol $(f^{-1})'(f(x))$ označuje hodnotu derivace funkce f^{-1} v bodě $f(x)$. Označíme-li $y = f(x)$, přepíšeme vztah na

$$(f^{-1})'(y)f'(x) = 1 \tag{5.9}$$

Nebo pomocí nekonečně malých veličin z (5.6) napíšeme větu o derivaci inverzní funkce

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

5.7.4 Derivace odmocnin podruhé

Z pravidla pro derivaci inverzní funkce odvodíme derivaci odmocniny. Pro $x > 0$ položme $y = f(x) = x^n$. Pak z (5.9) plyne

$$(\sqrt[n]{y})' n x^{n-1} = 1$$

Po dosazení $x = \sqrt[n]{y}$ a po úpravě dostaneme

$$(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n y^{(n-1)/n}}$$

5.7.5 Limita a spojitost derivace

Vyložíme, jak počítat derivaci funkcí zadaných „po částech“. Jako modelový příklad nám bude sloužit následující funkce s absolutní hodnotou.

$$f : x \mapsto |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1 - x^2 & x \in (-1, 1) \\ 0 & x \in \{1, -1\} \end{cases}$$

Protože je derivace limita, závisí její hodnota v bodě x jen na hodnotách v okolí tohoto bodu. Proto je pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ derivace rovna $f'(x) = 2x$. Pro $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) = -2x$. V bodech $x \in \{-1, 1\}$ buď spočítáme derivaci přímo z definice nebo použijeme následující větu.

Věta o limitě derivace. Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 a derivace f' má v x_0 limitu, případně jednostrannou limitu, pak má f v bodě x_0 derivaci, případně jednostrannou derivaci a platí

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

případně

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

případně

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

Důkaz. Dokážeme vztah pro limitu zprava. Podobně se dokáže vztah pro limitu zleva a odtud pak plyne vztah pro oboustrannou limitu.

Funkce f má na pravém okolí $(x_0, x_0 + \delta)$ konečnou derivaci, je tedy na tomto okolí spojitá. Zároveň víme, že je v bodě x_0 spojitá zprava. Jsou tedy splněny předpoklady Lagrangeovy věty, a tedy k $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ existuje $c_x \in (x_0, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$$

Předpokládáme, že existuje limita f' pro $x \to x_0^+$, ta je rovna limitě $f'(c_x)$ pro $x \to x_0^+$. Využíváme, že pro $x \to x_0^+$ se c_x také blíží k x_0 zprava. Proto platí

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

□

Pro výše uvedený příklad je

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2, \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -2x = -2$$

Z věty pak plyne $f'_+(1) = 2$, $f'_-(1) = -2$.

5.7.6 Výpočet derivací

Vrátíme se k příkladům, které jsem počítali v článku 5.1 a ukážeme, jak je spočítat pomocí pravidel odvozených v tomto článku.

1. $f : x \mapsto x^2$
   $f'(x) = 2x$, a proto je $f'(2) = 4$

2. $f : x \mapsto \sqrt{x}$
   $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, a proto je $f'(1) = 1/2$

3. $f : x \mapsto \operatorname{sgn} x$
   Použijeme vlastnost limity – její hodnota záleží jen na hodnotách funkce v okolí bodu, libovolně malém, ve kterém limitu počítáme. Pro $x > 0$ je $f(x) = 1$, a tedy $f'(x) = 0$. Podobně dostaneme $f'(x) = 0$ pro $x < 0$. Derivaci v nule pomocí vzorců spočítat neumíme, musíme postupovat jako v článku 5.1. Případně použijeme větu o spojitosti funkce v bodě, ve kterém má vlastní derivaci. Funkce sgn není v bodě nula spojitá, proto v tomto bodě nemůže mít vlastní derivaci.

4. $f : x \mapsto |x^2 - 1|$
   Derivace jsme spočítali v článku 5.7.5 se stejným výsledkem jako v 5.1.

5. Pokusíme-li se použít postup z předchozího příkladu na výpočet derivace funkce $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ v bodě nula, dostaneme pro $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \sin(1/x)$. Protože f' nemá v bodě nula limitu, není možné použít větu o limitě derivace a je třeba postupovat jako v článku 5.1.

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$
   $f'(x) = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2}$

5.8 Řešené příklady

1. Najdeme intervaly, na nichž je funkce f rostoucí.

$$f : x \mapsto 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12$$

   Spočítáme derivaci

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$$

   Řešením rovnice $f'(x) = 0$ je $x \in \{1, -1\}$.
   Řešením nerovnice $f'(x) \geq 0$ je $x \geq -1$.

   ZÁVĚR: funkce je rostoucí na intervalu $[-1, +\infty)$. Plyne to z věty o rostoucí funkci a znaménku derivace (pro interval uzavřený zleva).

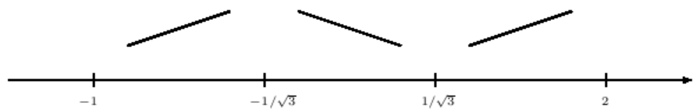
2. Nalezneme obrazy intervalů $I_1 = [-1, 2]$, $I_2 = [-1, 2)$, $I_3 = (-1, 2]$, $I_4 = (-1, 2)$ ve funkci $f : x \mapsto x^3 - x$.

   Víme, že obraz $f(I_1)$ je uzavřený interval.[1] Krajními body tohoto intervalu jsou minimální a maximální hodnota, kterou funkce f nabývá na intervalu I_1. Abychom tyto hodnoty zjistili, potřebujeme znát monotonii funkce f, proto spočítáme první derivaci: $f'(x) = 3x^2 - 1$ a vyřešíme nerovnice $f'(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$.

   Výsledky znázorníme na schematu dole. Zajímavé body ve schematu umístíme ve správném pořadí, na jejich vzdálenostech nám nezáleží.

[1] Obraz uzavřeného intervalu ve spojité funkci je uzavřený interval. Viz věta 4.3.34 z [2].

Schema vyjadřuje, že je funkce f rostoucí na intervalu $[-1, -1\sqrt{3}]$, klesající na intervalu $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ a rostoucí na intervalu $[1/\sqrt{3}, 2]$.



Odtud plyne, že minimální hodnota je jedna z hodnot $f(-1)$, $f(1/\sqrt{3})$. Výpočtem dostaneme $f(-1) = 0$, $f(1/\sqrt{3}) = -2/\sqrt{27}$. Ze znamének obou hodnot určíme, že minimální hodnota je $-2/\sqrt{27}$.

Podobně zjistíme, že maximální hodnota je jedna z hodnot $f(-1/\sqrt{3}) = 2\sqrt{27}$, $f(2) = 6$. Bezpoužití kalkulačky je vidět, že $2/\sqrt{27} < 1$, maximální hodnota je tedy $f(2) = 6$.

ZÁVĚR: $f(I_1) = [-2/\sqrt{27}, 6]$.

Obrazy dalších intervalů určíme úvahou z obrazu I_1. Hodnotu $f(2) = 6$ nabývá funkce na I_1 pouze v bodě $x = 2$. Hodnotu $f(-1) = 0$ nabývá i v některém bodě intervalu $(1/\sqrt{3}, 2)$. U této konkrétní funkce je snadné spočítat, že je to v bodě $x = 1$. Obecně dostaneme výsledek z věty o nabývání mezihodnot.

ZÁVĚR:

$$\begin{aligned}
f(I_2) &= f([-1,2)) = [-2/\sqrt{27}, 6) \\
f(I_3) &= f((-1,2]) = [-2/\sqrt{27}, 6] \\
f(I_4) &= f((-1,2)) = [-2/\sqrt{27}, 6)
\end{aligned}$$

Kapitola 6

Dodatek – rovnice přímky

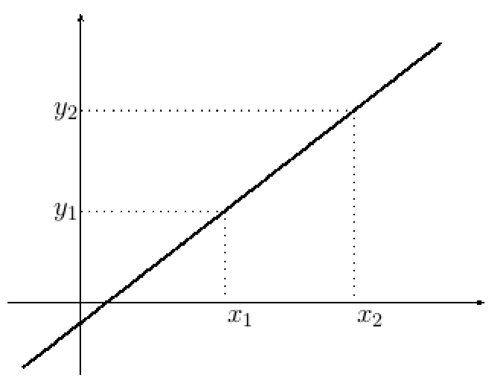
Pravděpodobně víte, že grafem lineární funkce $f : x \mapsto ax + b$ je přímka. Víte ale proč tomu tak je?

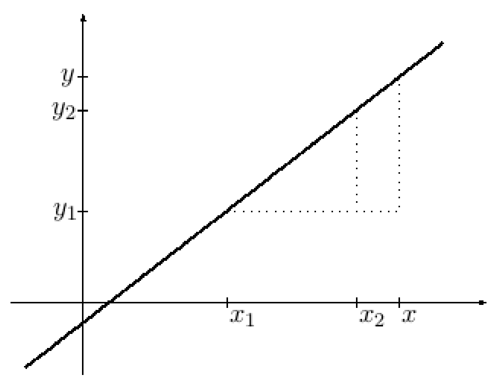
6.1 Rovnice přímky a podobnost trojúhelníků

Začneme opačným tvrzením, budeme zkoumat, jakou rovnici má přímka určená dvěma body.

Nejdřív probereme případ bodů se stejnou x-ovou souřadnicí, tedy bodů $[x_1, y_1]$, $[x_1, y_2]$. Přímka jimi určená je kolmá k ose x, není grafem žádné funkce a má rovnici $x = x_1$.

Dále probereme případ bodů, kdy je druhý vpravo nahoře od prvního Pro jejich souřadnice platí $y_2 > y_1$, $x_2 > x_1$.





Vlevo jsou znázorněny takové dva body a vpravo jsme do obrázku přidali další bod přímky a tečkovaně jsme vyznačili dva podobné pravoúhlé trojúhelníky.

Větší z nich má odvěsny délek $x-x_1$, $y-y_1$, ten druhý délek x_2-x_1, y_2-y_1. A z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{6.1}$$

Hodnotu výrazů v (6.1) nazýváme *směrnicí přímky*. Označíme ji k a vyjádříme pomocí souřadnic bodů na přímce

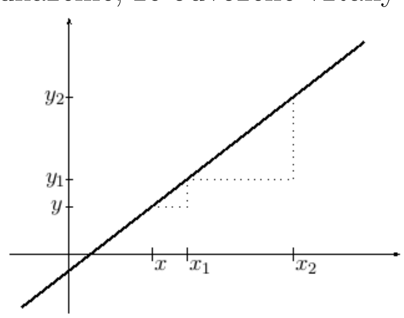
$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{6.2}$$

Rovnici přímky pak můžeme zapsat ve tvaru

$$y = y_1 + k(x-x_1) \tag{6.3}$$

Úlohy. Ze vztahů (6.1), (6.2) odvoďte vztah (6.3).
Napište rovnici přímky procházející body $[2,1]$, $[4,5]$.

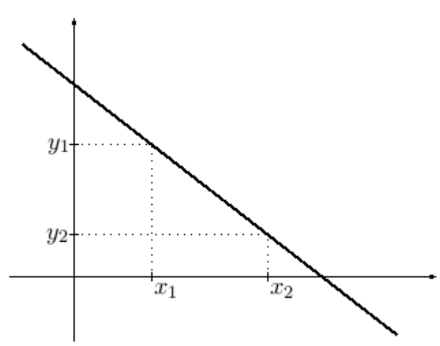
Výše jsme odvodili vztahy pro speciální polohu bodů. Na dalších obrázcích ukážeme, že odvozené vztahy platí i v obecné poloze.

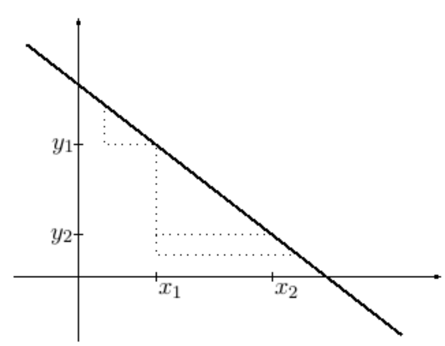


Uvažujme bod $[x,y]$ vlevo od bodu $[x_1,y_1]$. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

což je ekvivalentní vztahu (6.1).





Na obrázku vlevo jsou body splňující $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$. K nim jsou na obrázku vpravo zvoleny další dva body a čárkovaně dokresleny podobné trojúhelníky. Pro bod vlevo platí

$$\frac{y - y_1}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1},$$

pro bod vpravo

$$\frac{y_1 - y}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}.$$

Obě rovnosti upravíme vynásobením mínus jedničkou na (6.1).

Poslední případ je $y_1 = y_2$. Přímka je rovnoběžná s osou x a má rovnici $y = y_1$. Rozmyslete si, že tuto rovnici dostaneme jako speciální případ výše uvedených vztahů.

Závěr. Přímka určená dvěma různými body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ má v případě $x_1 = x_2$ rovnici $x = x_1$ a v případě $x_1 \neq x_2$ rovnici (6.3), kde za k dosadíme číslo vypočtené z (6.2).

6.2 Geometrický význam koeficientů

Odvodíme geometrický význam koeficientů a, b v rovnici $y = ax + b$.

Dosazením $x = 0$ dostaneme $y = b$. Proto protíná přímka o rovnici $y = ax + b$ osu y v bodě $[0, b]$.

Pro zjištění geometrického významu koeficientu a budeme potřebovat dva body přímky. Jejich souřadnice splňují rovnice $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Odečtením rovnic dostaneme $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ a po další úpravě

$$a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \tag{6.4}$$

tedy vztah (6.2), který jsme výše odvodili geometricky. Na následujících obrázcích ukážeme geometrický význam čísla a.

TODO: OBRÁZEK (Tato zkratka znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

6.3 Graf lineární funkce

Ukázali jsme, že každá přímka má rovnici buď $x =$ konstanta nebo (6.3). Možná se vám zdá, že z toho plyne, že každá rovnice (6.3) je rovnicí přímky. Není tomu tak, mohlo by se stát, že některé z rovnic popisují přímku a ostatní jinou křivku.

My zde ukážeme, že to nenastane, tedy, že každá rovnice (6.3) je rovnicí přímky. Vemte si z toho poučení, že v matematice je třeba každé tvrzení podložit důkazem. Nestačí se odkázat na zkušenost, že to ve všech dosud známých případech tak vždy bylo.

Přejděme tedy k důkazu. Uvažujme křivku o rovnici

$$y = ax + b \tag{6.5}$$

Dosaďme do ní dvě různé hodnoty x_1, x_2 a spočítejme k nim y_1, y_2. Dostaneme dva body, které na této křivce leží. Uvažujme rovnici přímky určené těmito dvěma body a zapišme ji ve tvaru

$$y = \tilde{a}x + \tilde{b} \tag{6.6}$$

Z (6.2) a z (6.4) plyne rovnost $a = \tilde{a}$. Dosazením x_1, y_1, $a = \tilde{a}$ do (6.5), (6.6) pak dostaneme $b = \tilde{b}$. odtud pak plyne totožnost rovnic (6.5), (6.6), a tedy i totožnost jejich grafů. A protože grafem (6.6) je přímka, je přímka i grafem (6.5).

Kapitola 7

Dodatek – úpravy výrazů

Při zkoumání vlastností funkcí neustále narážíme na nutnost umět upravovat výrazy. Proto těm „nejpotřebnějším“ úpravám věnujeme tento dodatek a čtenáři doporučíme se k němu vrátit pokaždé, když zjistí, že mu úpravy dělají potíže a potřebuje si je zopakovat.

7.1 Krácení kořenovým činitelem.

Krácení kořenovým činitelem je základní technika při počítání limit. Článek rozdělíme na dvě části. V první části budeme upravovat racionální funkce (podíly mnohočlenů), ve druhé výraz obsahující odmocniny.

7.1.1 Krácení v racionální funkci

Příklad. Určete definiční obor výrazu a pokraťte kořenovým činitelem, kořenovými činitely.

$$\frac{x^5-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení. Kořeny jmenovatele získáme vyřešením kvadratické rovnice: $x_1 = 1$, $x_2 = -1/2$, definiční obor výrazu tedy je množina $\mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$.

Číslo x_1 je též kořenem čitatele. Rozklad čitatele na součin získáme buď dosazením do vzorce $a^5 - b^5 = \dots$ nebo vydělením $(x^5-1) : (x-1)$. V obou případech dostaneme

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Rozklad jmenovatele je

$$2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1).$$

Pokrácením dostaneme

$$\frac{x^5-1}{2x^2-x-1} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{2x+1}.$$

Další společný kořen čitatel se jmenovatelem nemají, proto není další krácení možné.

Úkol. Určete definiční obor výrazů a pokraťte kořenovým činitelem, kořenovými činitely.

$$\frac{(x^2-1)^2}{(x^4-1)(x-1)} \qquad \frac{(x^2-5x+6)^6}{(x^3-4x^2+4x)^3}$$

7.1.2 Krácení v iracionální funkci

Příklad. Určete definiční obor výrazu a pokraťte kořenovým činitelem, kořenovými činitely.

$$\frac{2x+\sqrt{x+5}}{1-x^2}$$

Řešení. Definiční obor výrazu je $[-5,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$, nebo jinak zapsané $[-5,+\infty) \setminus \{-1,1\}$. Kořeny jmenovatele jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Číslo x_1 je také kořenem čitatele. Abychom dokázali pokrátit, zbavíme se v čitateli odmocniny tím, že zlomek rozšíříme výrazem $2x - \sqrt{x+5}$ a použijeme vztah $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Dostaneme

$$\frac{2x+\sqrt{x+5}}{1-x^2} = \frac{4x^2-x-5}{(1-x^2)(2x-\sqrt{x+5})}$$

Nyní čitatele a jmenovatele rozložíme na součin kořenových činitelů

$$\frac{4x^2-x-5}{(1-x^2)(2x-\sqrt{x+5})} = \frac{(x+1)(4x-5)}{(1-x)(1+x)(2x-\sqrt{x+5})}$$

a pokrátíme

$$\frac{(x+1)(4x-5)}{(1-x)(1+x)(2x-\sqrt{x+5})} = \frac{4x-5}{(1-x)(2x-\sqrt{x+5})}$$

Poznamenejme, že jsme úpravou vytvořili nový společný kořen čitatele a jmenovatele $x = 5/4$. Jiné psolečné kořeny čitatel se jmenovatelem nemají.

Úkol. V kapitole 3.4.1 jsme jako jeden z kořenů rovnice s parametrem dostali

$$x = \frac{1 - \sqrt{y^2 - y + 1}}{y - 1}$$

Ukažte, že definiční obor zlomku jsou reálná čísla kromě jedničky a že jednička je kořenem nejen jmenovatele, ale i čitatele. Dále pokraťte zlomek kořenovým činitelem.

7.2 Vytýkání a rozšiřování

Při počítání nevlastních limit (tedy limit pro proměnnou rostoucí nade všechny meze v kladných nebo záporných hodnotách) nás zajímají především členy s nejvyšší mocninou. *Většinou*[1] stačí k prvnímu přiblížení ostatní členy „docela obyčejně škrtnout". Například z výrazu $\sqrt{2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}$ „škrtnutím" dostaneme výraz $\sqrt{2x^4} = x^2\sqrt{2}$. Korektní postup je místo škrtání nejvyšší mocninu vytknout

$$\sqrt{2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6} = x^2\sqrt{2 + \tfrac{3}{x} + \tfrac{4}{x^2} + \tfrac{5}{x^3} + \tfrac{6}{x^4}}$$

Výraz pod odmocninou pak pro velká x nabývá hodnotu blízkou $\sqrt{2}$.

Pokud čtenáři takové vytýkání dělá problémy, doporučujeme mu nahradit ho rozšířením – stejným výrazem jako jsme vytýkali, tedy x^2.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6} &= x^2\frac{\sqrt{2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}}{x^2} \\
&= x^2\frac{\sqrt{2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6}}{\sqrt{x^4}} \\
&= x^2\sqrt{2 + \tfrac{3}{x} + \tfrac{4}{x^2} + \tfrac{5}{x^3} + \tfrac{6}{x^4}}
\end{aligned}$$

Pozor přitom na následující úpravy: Pro která x platí $\sqrt{x^2} = x$? A pro která $\sqrt{x^4} = x^2$?

[1]Ale ne vždy. Viz varovný příklad dále. Nedoporučujeme používat metodu škrtání, dokud metodou vytýkání nespočítáte tolik příkladů, abyste viděli, co se při škrtnutí vlastně děje.

Příklad. V následujícím výrazu vytkneme x a zkrátíme. Úpravy platí pro $x > 0$.

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \frac{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x(2+\frac{3}{x})} = \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}$$

Totéž výše popsanou technikou rozšíření

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \frac{\frac{1}{x}(x+\sqrt{x^2+1})}{\frac{1}{x}(2x+3)} = \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}$$

Pro $x < 0$ je $\sqrt{x^2} = -x$, a proto je

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x+3} = \frac{\frac{1}{x}(x+\sqrt{x^2+1})}{\frac{1}{x}(2x+3)} = \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}$$

Úkol. Ještě jednou se vrátíme k výrazu z kapitoly 3.4.1

$$\frac{1-\sqrt{y^2-y+1}}{y-1}$$

Upravte zlomek vytknutím a ukažte tím, že pro y velké kladné nabývá zlomek hodnot přibližně mínus jedna a pro y velká záporná hodnot přibližně plus jedna.

Varovný příklad. Výše jsme poukázali na to, že limity v nekonečnu lze často určit „škrtnutím vhodných členů“. Následující příklad ukazuje, proč takový postup nedoporučujeme.

$$\frac{\sqrt{x^4+x^3+1}-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x+2}$$

„Škrtnutím“ dostaneme $(\sqrt{x^4}-\sqrt{x^4})/(x+2) = 0/(x+2) = 0$. Korektním postupen dostaneme

$$\frac{\sqrt{x^4+x^3+1}-\sqrt{x^4-x^3+1}}{x+2} = \frac{2x^3}{(x+2)(\sqrt{x^4+x^3+1}+\sqrt{x^4-x^3+1})}$$

Další „škrtnutí“ je již korektní, jak ukazuje následující úloha

Úloha. Upravte vytknutím výraz

$$\frac{2x^3}{(x+2)(\sqrt{x^4+x^3+1}+\sqrt{x^4-x^3+1})}$$

na výraz

$$\frac{2}{(1+\frac{2}{x})(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}})}$$

7.3 Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky je opačná operace ke sčítání zlomků. Například z výsledku sčítání TODO (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Výklad rozdělíme na dvě části. Ve druhé části vysvětlíme, jak ke konkrétní racionální funkci určit tvar parciálních zlomků. V první části vysvětlíme, jak ke známému tvaru určit koeficienty parciálních zlomků.

7.3.1 Určení koeficientů při rozkladu na parciální zlomky

7.3.2 Určení jmenovatelů parciálních zlomků

7.4 Úpravy při odvozování derivací

V tomto článku probereme úpravy výrazů, které používáme k odvození vzorců pro derivaci mocninných funkcí a odmocnin.

7.4.1 Použití binomické věty

Z binomické věty dostaneme

$$\begin{aligned}
(x+h)^2 &= x^2+2xh+h^2 \\
(x+h)^3 &= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3 \\
(x+h)^4 &= x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4 \\
&\vdots \\
(x+h)^n &= x^n+nx^{n-1}h+\tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n
\end{aligned}$$

a odtud dále dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \\
\frac{(x+h)^3-x^3}{h} &= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2+3xh+h^2 \\
\frac{(x+h)^4-x^4}{h} &= \frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h} = 4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3 \\
&\vdots \\
\frac{(x+h)^n-x^n}{h} &= \frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h} \\
&= nx^{n-1}+\tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}
\end{aligned}$$

7.4.2 Odstraňování rozdílu odmocnin

Použijeme vzorce:

$$\begin{aligned}
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\
a^4-b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\
&\vdots \\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})
\end{aligned}$$

Zvolíme: $a=\sqrt[n]{x+h}$, $b=\sqrt[n]{x}$ a rozšíříme výrazem $a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+h}-\sqrt{x} &= \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x} &= \frac{h}{(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}} \\
\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x} &= \frac{h}{(x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}} \\
&\vdots \\
\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x} &= \frac{h}{(x+h)^{(n-1)/n}+(x+h)^{(n-2)/n}x^{1/n}+(x+h)^{(n-3)/n}x^{2/n}+\cdots+x^{(n-1)/n}}
\end{aligned}$$

a odtud dále

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\
\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{1}{(x+h)^{2/3}+(x+h)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}} \\
\frac{\sqrt[4]{x+h}-\sqrt[4]{x}}{h} &= \frac{1}{(x+h)^{3/4}+(x+h)^{2/4}x^{1/4}+(x+h)^{1/4}x^{2/4}+x^{3/4}} \\
&\vdots \\
\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{h} &= \frac{1}{(x+h)^{(n-1)/n}+(x+h)^{(n-2)/n}x^{1/n}+(x+h)^{(n-3)/n}x^{2/n}+\cdots+x^{(n-1)/n}}
\end{aligned}
$$

Kapitola 8

Změny v textu po 30. září 2019

2. 10. 2019	– Malá změna v kapitole 2.1.5 o spojitosti.
8. 10. 2019	– Opravena chyba v úkolu ze závěru kapitoly 2.1.3 o monotonii.
5. 12. 2019	– Opravena chyba v jednom komentáři v dodatku o úpravách 7.4.2.
	– Přidána kapitola o derivacích.
10. 12. 2019	– Opraveny překlepy (čtyřikrát g místo f) v kapitole o derivacích.

Literatura

[1] Jindřich Bečvář and Martina Bečvářová. Vývoj matematiky jako popularizující stimul.
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/oppa/matematika_stimul_blok.pdf.

[2] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.

Rejstřík