Úlohy z funkcí I (grafy, rovnice a nerovnice)

1. (a) Načrtněte graf funkce $x \mapsto x^2$ a použijte ho k vyznačení čísla $\sqrt{3}$ na ose x. Vysvětlete pomocí tohoto grafu, proč není definovaná druhá odmocnina ze záporných čísel.

   (b) Načrtněte graf funkce $x \mapsto x^3$ a použijte ho k vyznačení čísel $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{-4}$ na ose x. Vysvětlete pomocí tohoto grafu, proč je třetí odmocnina definovaná pro všechna reálná čísla.

2. Vysvětlete, jak jsou definované funkce $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ a načrtněte jejich grafy do jednoho obrázku.

3. Řekněte (napište) definici funkce klesající na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ a ukažte, že mocninná funkce se sudým exponentem je klesající na intervalu $(-\infty, 0]$.

4. Řekněte svými slovy, co znamená následující zápis

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 - x & x \in [-1, 1) \\ x^2 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

   Dále načrtněte graf funkce f a zodpovězte otázky

   (a) Jaký má funkce f definiční obor?

   (b) Jaký má funkce f obor hodnot?

   (c) Kolik kořenů má rovnice $f(x) = 1$?

   (d) Pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $f(x) = y$ s neznámou x alespoň jeden kořen? Pro která má právě jeden kořen? Pro která má více než jeden kořen?

   (e) Má f v bodě 1 jednostranné limity? Čemu jsou rovny?

   (f) Je f v bodě 1 spojitá?

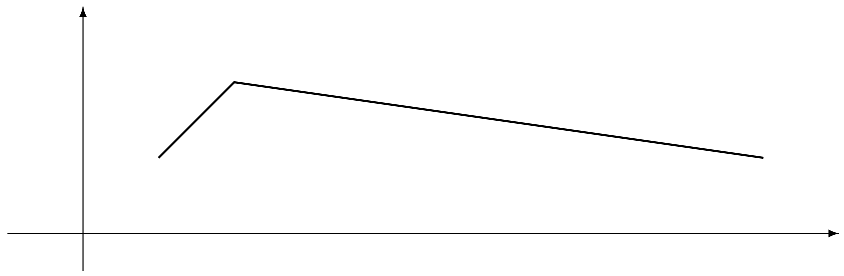
5. Funkce signum (česky znaménková funkce) je definovaná vztahy

$$\operatorname{sgn} : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

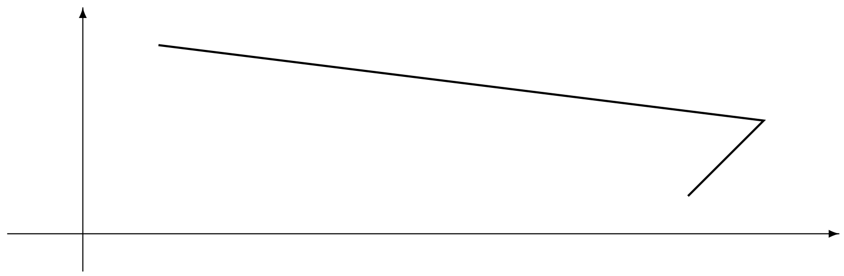
   Načrtněte její graf, určete její limity v bodě nula a rozhodněte, zda je v tomto bodě spojitá.

6. Která z následujících množin je grafem funkce (se vzory na vodorovné ose a obrazy na svislé ose)? Vyznačte, případně, na osy definiční obor a obor hodnot této funkce.

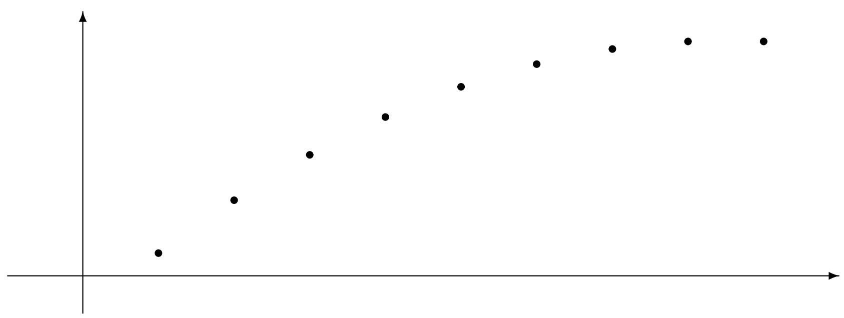
   (a)



   (b)



   (c)



7. Nakreslete křivky zadané rovnicemi a určete, zda jsou grafem funkce se vzorem $x \in \mathbb{R}$ a obrazem $y \in \mathbb{R}$. Vyznačte případně na osy definiční obor a obor hodnot této funkce.

   (a) $x^2 + y^2 = 1$

   (b) $x + y = 1$

   (c) $x^2 + y = 0$

   (d) $x + y^2 = 0$

8. Načrtněte graf funkce f a řešte graficky i početně rovnici $f(x) = 3$ a nerovnici $f(x) \leq 3$.

   (a) $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$

   (b) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{2-x}$

   Poznámka: grafické řešení znamená vyznačení kořenů na ose x; početní řešení znamená výpočet kořenů.

9. Pro funkce z příkladu 8 řešte následující úlohy:

   (a) Určete z grafu počet kořenů rovnice $f(x) = y$ v závislosti na hodnotě proměnné y.

   (b) Vypočtěte kořeny rovnice $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y.

   Návod: nevíte-li si rady, postupujte jako v příkladě 8 – dosazujte za y nejprve konkrétní hodnoty a rovnici s obecným y pak řešte obdobně.

10. Řekněte (napište) definici *oboru hodnot funkce* a na základě výsledků úlohy 9 určete obor hodnot příslušných funkcí.

11. Řekněte (napište) definici *prosté funkce* a rozhodněte, zda jsou funkce z příkladu 8 prosté.

12. Vypočtěte kořeny rovnice $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y a na základě spočítaných kořenů určete obory hodnot těchto funkcí a rozhodněte, zda jsou prosté.

    (a) $f : x \mapsto \frac{x^2-x+2}{x+1}$

    (b) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$

    (c) $f : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+4}$

    (d) $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x^2-1}$

    Poznámka: pokud si nevíte s úlohou rady, dosaďte nejdříve za y do rovnice konkrétní číslo – podobně jako v úloze 8.

*13. Použijte výsledky úlohy 12 k načrtnutí grafů příslušných funkcí.
Poznámka: Úlohy označené hvězdičkou jsou určené k zamyšlení a k diskusi (mezi studenty navzájem i s vyučujícím) a slouží k hlubšímu pochopení látky.

*14. Načrtněte grafy funkcí

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x^2), \quad x \mapsto 3x - \operatorname{sgn} x, \quad x \mapsto (\operatorname{sgn} x)^2, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(3x - x^2)$$

Návod: postupujte jako při práci s výrazy s absolutní hodnotou. Rozdělte reálnou osu na části, na nichž je argument funkce signum kladný, nulový, záporný.

*15. Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí celou část z čísla x, přesněji řečeno největší celé číslo menší nebo rovno x. Jinak řečeno je $\lfloor x \rfloor$ celé číslo, které vznikne z x zaokrouhlením dolu. Například $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lfloor 0.9 \rfloor = 0$, $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
Načrtněte graf funkce $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
Návody:
Nakreslete několik bodů grafu.
Položte si otázku: pro jaká x je $\lfloor x \rfloor = 0$? A nakreslete graf konstantní funkce na vámi zjištěném intervalu.
A pak obdobně: pro jaká x je $\lfloor x \rfloor$ rovno jedné? …Mínus jedné?

*16. Načrtněte grafy funkcí $x \mapsto (\lfloor x \rfloor)^2$, $x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$.
Návod: Postupujte podobně jako v předchozím příkladu. Mohlo by vám pomoct nakreslit si graf funkce $x \mapsto x^2$.

*17. Načrtněte graf funkce $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.