

## Třetí série úloh ze středoškolské matematiky

1. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot zjistěte, zda je ekvivalentní výrok  $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)$  s výrokem  $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ . (Symbol  $\neg$  označuje negaci, tedy  $\neg a$  značí negaci výroku  $a$ .)

1a Výrok:  $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$  s výrokem  $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ .

1b Výrok  $\neg(a \Rightarrow b)$  s výrokem  $a \wedge \neg b$ .

1c Výrok  $(a \vee b) \wedge c$  s výrokem  $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ .

2. Ukažte, že následující výroky jsou pravdivé pro jakékoli pravdivostní ohodnocení výroků  $a, b, c$

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow a), \quad (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$$

3. Zapište pomocí jednoho výroku ( $a, \neg a, 1$  nebo  $0$ ) následující výroky:  $a \vee 1, a \wedge 1, a \vee 0, a \wedge 0, a \vee a, a \vee \neg a, a \wedge a, a \wedge \neg a$ . Symboly  $1$ , popřípadě  $0$ , označují pravdivý, popřípadě nepravdivý, výrok.

Návod: přemýšlejte o významu uvedených logických spojek a pokud si nevíte rady, použijte tabulku pravdivostních hodnot.

4. Znegujte výroky a rozhodněte o jejich platnosti. Svůj závěr řádně zdůvodněte. Výroky i jejich negace napište slovy.

(a)  $(\exists x \in \mathbb{R})(x - 4 > 0)$

(b)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x) \geq -1)$

4a (a)  $(\exists x \in \mathbb{R})(\sin(x) > -1)$

(b)  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq -1)$

5. Na reálné ose vyznačte množiny  $A, B$  a množiny  $A \cap B, A \cup B$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1/x \leq 1/6\}$$

5a Na reálné ose vyznačte množiny  $A, B$  a množiny  $A \cap B, A \cup B$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x - 1 \leq 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : (x - 1)/x \geq 2\}$$

6. Nalezněte všechna reálná čísla splňující

$$x + 1 = \sqrt{3x + 7}$$

7. Určete, které vztahy:  $A = B$ ,  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq A$  jsou platné.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x + 1 = \sqrt{3x + 7}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 = 3x + 7\} \end{aligned}$$

6a Nalezněte všechna reálná čísla splňující

$$2x + 1 = \sqrt{2x^2 + 1}$$

7a Určete, které vztahy:  $A = B$ ,  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq A$  jsou platné.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x + 1 = \sqrt{2x^2 + 1}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 = 2x^2 + 1\} \end{aligned}$$