Lemma o spojitosti identity, konstantní funkce a převrácené hodnoty

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

Pak jsou funkce

$$\mathrm{id}: x \mapsto x$$

$$\mathrm{konst.}: x \mapsto a$$

spojité v bodě x_0

Je-li $x_0 \neq 0$, je funkce

$$\mathrm{převr}: x \mapsto \frac{1}{x}$$

spojitá v bodě x_0.

Důkaz provedeme na tabuli.

Věta o spojitosti funkce a aritmetických operacích

Nechť jsou funkce f, g spojité v bodě x_0.

Pak jsou v bodě x_0 spojité i funkce

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$x \mapsto f(x) - g(x)$$

$$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Pokud je $g(x_0) \neq 0$, pak je i

$$x \mapsto f(x) / g(x)$$

spojitá v bodě x_0.

Později uvedeme hlavní myšlenky důkazu.

Důsledek:

Polynomy (mnohočleny) a racionální funkce (podíly polynomů) jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru.

Např. $f(x) = x^3 - 5x + 6$

je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{x^5 - 6x}{x^2 - 1}$$

je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Věta o spojitosti složené funkce

Nechť je f spojitá v bodě x_0 a g spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$.

Pak je složená funkce

$$x \mapsto g(f(x))$$

spojitá v bodě x_0.

Důkaz provedeme na tabuli.

Důsledek:

Až dokážeme spojitost odmocniny, bude odtud plynout spojitost dalších funkcí.

Věta o spojitosti odmocniny

Nechť je $x_0 \in (0, +\infty)$.

Pak je funkce

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

spojitá v bodě x_0 a

je spojitá zprava v bodě nula.

Důkaz provedeme na tabuli.

Věta o lokální omezenosti spojité funkce

Nechť je $x_0 \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě x_0.

Pak

$$(\exists \delta > 0)(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in U_\delta(x_0))(|f(x)| \leq K)$$

Důkaz provedeme na tabuli.