Úlohy z funkcí na extrémy a monotonii

16. listopadu 2021

1. Ukažte, že funkce f má definiční obor $\mathbb{R}$ a že je na $\mathbb{R}$ rostoucí.

$$f : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$$

2. Zformulujte větu o znaménku derivace pro klesající funkci.

3. Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f monotonní. Ve výsledcích uvádějte intervaly maximální vzhledem k inkluzi – tedy takové, které nejsou vlastní podmnožinou intervalu, na němž je funkce také monotonní. Zvláštní pozornost věnujte zahrnutí/nezahrnutí krajních bodů do intervalu.

$$f : x \mapsto x^3 + x^2 - 6x$$

3a

$$f : x \mapsto |x + 3| - x^2 - 5x$$

3b

$$f : x \mapsto (x^2 - 1)(x - 1)^2$$

3c

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

3d

$$f : x \mapsto (x + 1)(x + 2)^2$$

3d

$$f : x \mapsto (1 - x)^4(1 + x)^8$$

3e

$$f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

4. Určete obraz $= f(I)$ intervalu $I = [-1, 1]$

$$f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$$

4a

$$f : x \mapsto \frac{4x - 3}{x^2 + 1}, \quad I = [-1, 3]$$

4b

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}, \quad I = [0,3]$$

4c

$$f : x \mapsto (x+1)(x+3)^3, \quad I = [-3,0]$$

4d

$$f : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}, \quad I = [1,9]$$

5. Vyřešte úlohy 4 – 4d pro otevřený interval a intervaly z jedné strany otevřené a z druhé uzavřené.

6. Ukažte, že funkce nemůže být na intervalu I zároveň rostoucí i klesající.

7. Ukažte, že funkce, která je na intervalu I zároveň nerostoucí a neklesající, je na I konstantní.

8. Ukažte pomocí tabulky pravdivostních hodnot ekvivalenci výroků

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \qquad (\neg C \wedge B) \Rightarrow \neg A$$

9. Ukažte ekvivalenci výroků z předchozího příkladu úvahou.

10. Zvolte $k > 0$ a bod $[x_0, y_0]$, načrtněte přímky o rovnicích

$$y = y_0 + k(x - x_0) \qquad y = y_0 + \tfrac{k}{2}(x - x_0)$$

a vyšrafujte množinu

$$M = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{y - y_0}{x - x_0} > \frac{k}{2} \right\}.$$