Úlohy na obor hodnot funkce

7. prosince 2021

1. Pro interval I a funkci f určete obraz $I_1 = f(I)$ a vzor $I_2 = f^{-1}(I_1)$.

$$I = (-2, 2] \qquad f : x \mapsto |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

2. Pro následující funkce určete definiční obor a obor hodnot. Dále určete, zda jsou tyto funkce prosté a zda k nim existuje inverzní funkce.

(a)
$$f(x) = \frac{6x+6}{x^2+3x+6}$$

(b)
$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+3}$$

(c)
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$$

(d)
$$f(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

(e)
$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f. Výpočet proveďte dvěma způsoby – s užitím derivace a limit a řešením rovnice s parametrem.

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-2}$$

4. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+x+1}$$

5. Ukažte, že k funkci z předchozího příkladu existuje inverzní funkce a nalezněte její předpis.

6. Pro funkci

$$R(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

Vypočtěte $R'(x)$, $R''(x)$, $R'''(x)$, $R(a)$, $R'(a)$, $R''(a)$.

7. Využijte výsledek předchozí úlohy k určení $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, $F(a)$, $F'(a)$, $F''(a)$ pro
$$F(x) = R(x) - \frac{(x-a)^3}{(b-a)^3} R(b)$$

*8 Použijte třikrát Rolleovu větu na funkci F na intervalu $[a, b]$ a odvoďte lagrangeův tvar zbytku Taylorova polynomu stupně dva.