SPOJITOST A ARITMETICKÉ OPERACE

Věta:

Nechť jsou funkce f, g spojité v bodě x_0.

Pak jsou funkce

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$x \mapsto f(x) - g(x)$$
$$x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

spojité v bodě x_0.

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, pak je funkce $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

spojitá v bodě x_0.

Poznámka:

Věta spolu se spojitostí konstantní a identické funkce dá spojitost mnohočlenů a podílů mnohočlenů (tzv. racionálních funkcí)

DŮKAZ VĚTY O SPOJITOSTI A ARITMETICKÝCH OPERACÍCH

(hlavní myšlenky důkazu)

Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))| = |f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{<\tilde{\varepsilon}} + \underbrace{|g(x)-g(x_0)|}_{<\tilde{\varepsilon}} < \tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon} = 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)| = |f(x)\cdot(g(x)-g(x_0)) + f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$= |f(x)(g(x)-g(x_0)) + g(x_0)(f(x)-f(x_0))| \leq$$

$$\leq |f(x)(g(x)-g(x_0))| + |g(x_0)(f(x)-f(x_0))| =$$

$$= \underbrace{|f(x)|}_{\substack{\text{omezené} \\ \leq K}} \cdot \underbrace{|g(x)-g(x_0)|}_{\substack{\text{malé} \\ <\tilde{\varepsilon} \\ <\tilde{\varepsilon}}} + \underbrace{|g(x_0)|}_{\substack{\text{konstanta} \\ =g(x_0)}} \cdot \underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{\substack{<\tilde{\varepsilon} \\ <\tilde{\varepsilon}}} < \tilde{\varepsilon}(K+g(x_0)) = \varepsilon$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K+g(x_0)}$$

ÚPLNÝ DŮKAZ VĚTY PRO SOUČET A SOUČIN

Chceme ukázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že:

v případě součtu $\quad (\forall x \in U_\delta(x_0))\left(|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| < \varepsilon\right)$

v případě součinu $\quad (\forall x \in U_\delta(x_0))\left(|f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| < \varepsilon\right)$

SOUČET

Pro $\varepsilon > 0$ označíme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$; $\tilde{\varepsilon}$ je také kladné,

proto existují

$\delta_1 > 0$ takové, že $(\forall x \in U_{\delta_1}(x_0)) \left(|f(x) - f(x_0)| < \tilde{\varepsilon} \right)$

$\delta_2 > 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ δ_2 $\qquad$ $|g(x) - g(x_0)|$

Zvolíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pak pro $x \in U_\delta(x_0)$ platí obojí: $|f(x) - f(x_0)| < \tilde{\varepsilon}$ i $|g(x) - g(x_0)| < \tilde{\varepsilon}$ a tedy (viz trojúhelníková nerovnost na předchozí straně) platí

$$|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| < \varepsilon$$

SOUČIN

Nejdříve použijeme lokální omezenost funkce f v bodě x_0: víme, že k $\varepsilon > 0$ existují $\delta_1 > 0$, $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$(\forall x \in \mathcal{U}_{\delta_1}(x_0))\ (|f(x)| \leq K)$$

Pak označíme $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{K + |g(x_0)|}$, které je kladné, proto existují δ_2, δ_3 taková, že

$$(\forall x \in \mathcal{U}_{\delta_2}(x_0))\ (|f(x) - f(x_0)| < \tilde{\varepsilon})$$

$$(\forall x \in \mathcal{U}_{\delta_3}(x_0))\ (|g(x) - g(x_0)| < \tilde{\varepsilon})$$

Zvolíme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, pak pro $x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0)$ platí všechny tři výše uvedené výroky a odtud a z úprav na předchozím listě plyne $|f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| < \varepsilon$