Definice:

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je shora (zdola) omezená, pokud $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(H \geq x)$

$(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(D \leq x)$

Příklad: $M = (-3, 1)$ je omezená shora i zdola:

$D = -3$, $H = 1$

Definice:

Řekneme, že množina M je omezená, pokud je omezená shora i zdola.

Příklad: $M = (-3, 1)$ je omezená

$M = (-1, +\infty)$ je omezená zdola, není omezená shora, není omezená.

Důkaz:

$\cancel{Ex}\ U_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$M = \{f(x) : x \in U_\delta(x_0)\}$

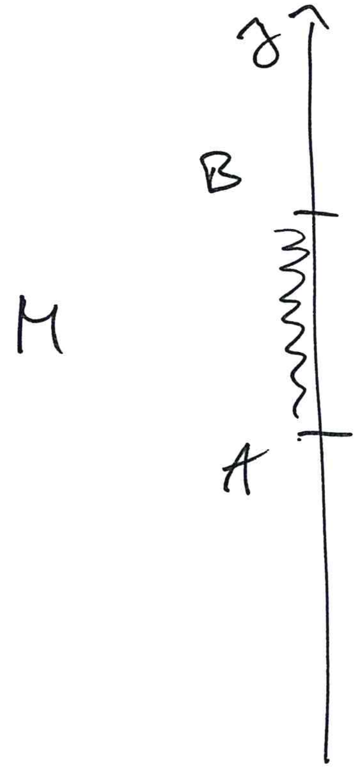
~~z δ~~ ze spojitosti f v bodě to plyne, že

pro $y \in M$ platí $\quad y \le f(x_0)+1$

$$y \ge f(x_0)-1$$

Tedy množina M je shora i zdola omezená.

Úloha 2 z 27.10.



$$(\forall y \in M)(y \in [A, B])$$

$$\underline{y \le B} \wedge \underline{y \ge A}$$

$$y = f(x)$$

my potřebujeme odhad $|y| = |f(x)|$

Lemma:

Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je omezená právě když

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall y \in M)(|y| \le K)$$

Důkaz:

Budeme dokazovat dvě implikace:

1) $\underbrace{M \text{ je omezená}}_{\text{předpoklad}} \Rightarrow \underbrace{(\exists K \in \mathbb{R})(\forall y \in M)(|y| \le K)}_{\text{tvrzení, závěr}}$

2) $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall y \in M)(|y| \le K) \Rightarrow M$ je omezená

2) je zřejmé: $|y| \le K \quad \dots \quad -K \le y \le K$

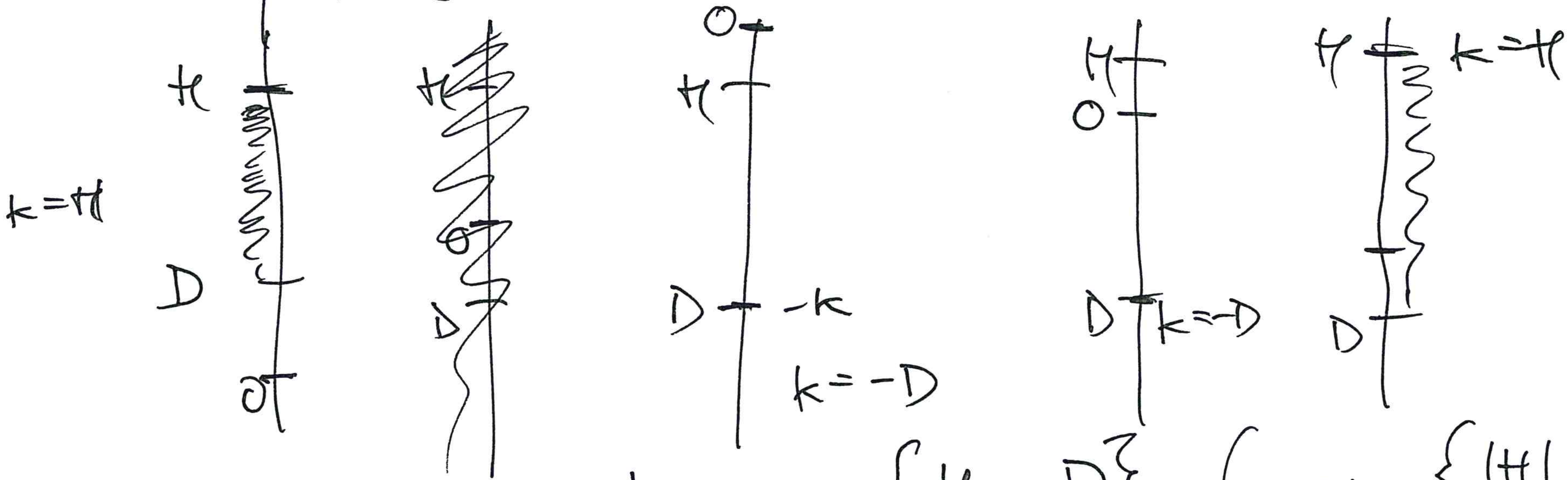
$$(-K \le y \ \wedge \ y \le K)$$

tedy K je horní hranice $(K = H)$

$-K$ dolní $(-K = D)$

1) předpokládáme: ex. $H \in \mathbb{R}$, ex. $D \in \mathbb{R}$ takové, že

$$(\forall y \in M)(D \le y \le H)$$



$K = \max\{H, -D\} \quad (\max\{|H|, |D|\})$

$\nLeftarrow$ $V_1 \Leftrightarrow V_2$

$(V_1 \Rightarrow V_2) \land (V_2 \Rightarrow V_1)$

Úkol na 3. 11. 2020

① Popište svými slovy postup řešení nerovnice, který používá větu o kořeni spojité funkce

② Vysvětlete jak kroky z vašeho postupu plynou z věty o kořeni.