Lema:

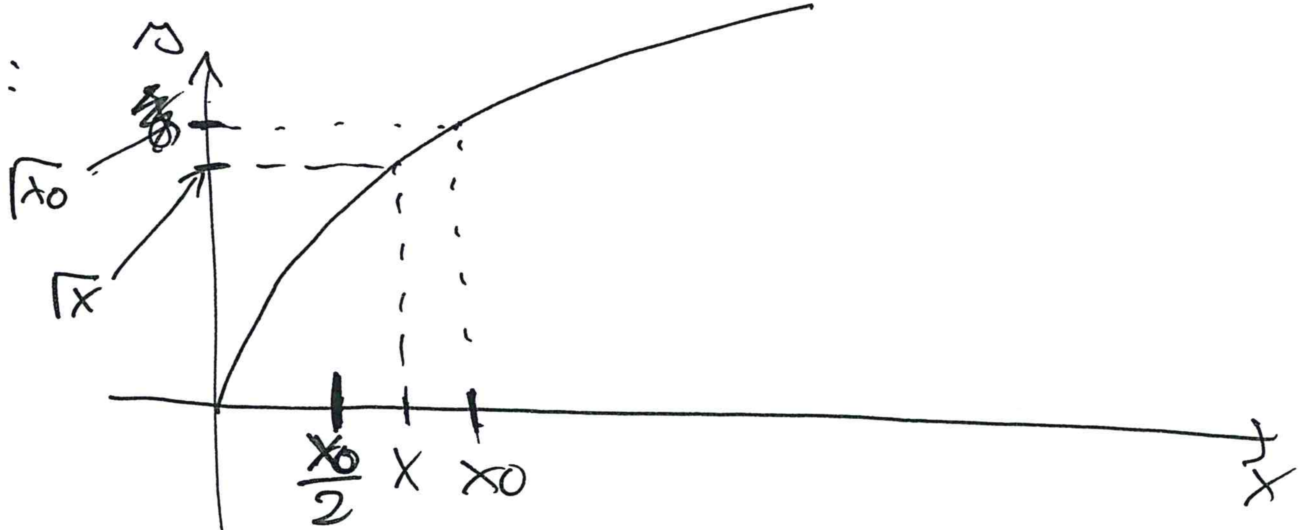
Funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ je spojitá na $[0, +\infty)$.

Důkaz:

1) dokážeme spojitost zprava v bodě 0

2) dokážeme spojitost v $x_0 \in (0, +\infty)$

2):



$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|}{1} \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$x > \frac{x_0}{2} = D \qquad \sqrt{x} > \sqrt{D} \qquad$ odmocnina je rostoucí funkce

$x_0 > \frac{x_0}{2} = D \qquad \sqrt{x_0} > \sqrt{D}$

$|x - x_0| < \delta$

$\sqrt{x} + \sqrt{x_0} > 2\sqrt{D} \quad | : 2\sqrt{D} \quad : \sqrt{x} + \sqrt{x_0}$

$\frac{1}{2\sqrt{D}} > \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$

???

chceme: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < M$

pak $\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \delta \cdot M = \varepsilon$

k $\varepsilon > 0$ kv. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

1) dokazovat z def. nebude

$x \mapsto \sqrt{10-x^2} = z$

vnitřní funkce: $x \mapsto 10-x^2 = y$ ... je spojitá

vnější —"— $y \mapsto \sqrt{y} = z$ ... je spojitá

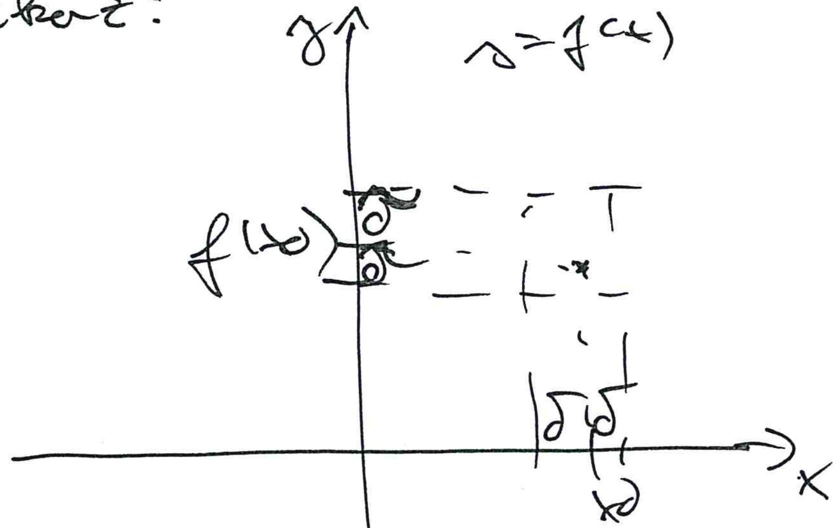
Věta:

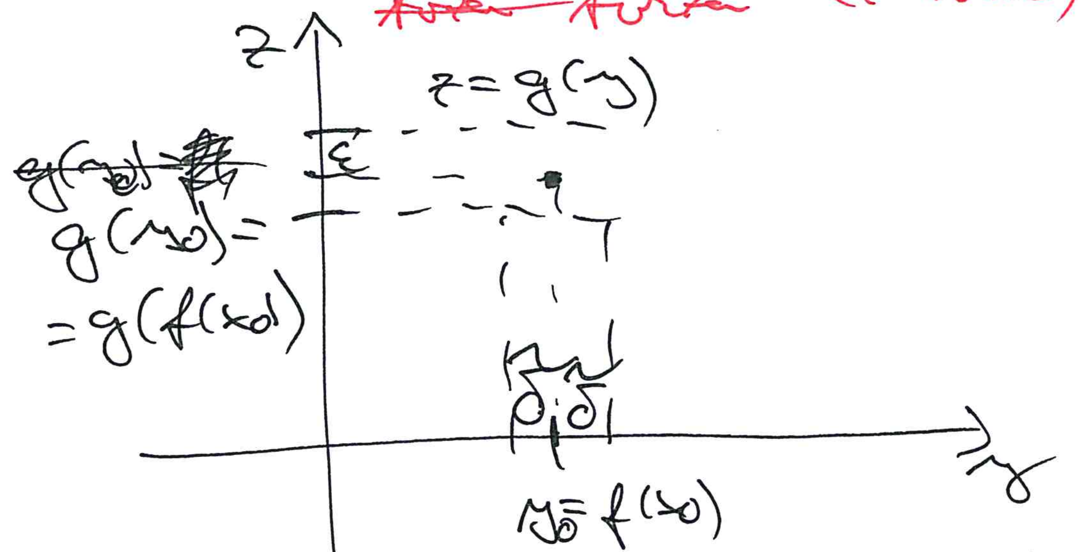
předpoklady věty

Nechť f je funkce spojitá v bodě x_0, g je funkce spojitá v bodě $f(x_0)$, pak je funkce $x \mapsto g(f(x))$ spojitá v bodě x_0.

~~tvrz~~ tvrzení (závěr)

Důkaz:





k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $(\forall y \in U_\delta(f(x_0)))$

platí $\left(g(y) \in U_\varepsilon(g(y_0)) \right)$

k $\tilde{\delta} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\left(\forall x \in U_\delta(x_0) \right)$

platí $f(x) \in U_{\tilde{\delta}}(f(x_0))$)

tedy: k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$:

$x \in U_\delta(x_0)$, pak $f(x) \in \underbrace{U_{\tilde{\delta}}(f(x_0))}_{U_{\tilde{\delta}}(y_0)}$ (

pak $\underbrace{g(y)}_{g(f(x))} \in U_\varepsilon(g(y_0))$

$g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(f(x_0)))$