OBRAZ MNOŽINY (INTERVALU)

Definice:

Obrazem množiny M ve funkci f je množina funkčních hodnot $f(x)$ pro $x \in M$. Značíme $f(M)$.

$$f(M) = \{ f(x) : x \in M \}$$

Příklad:

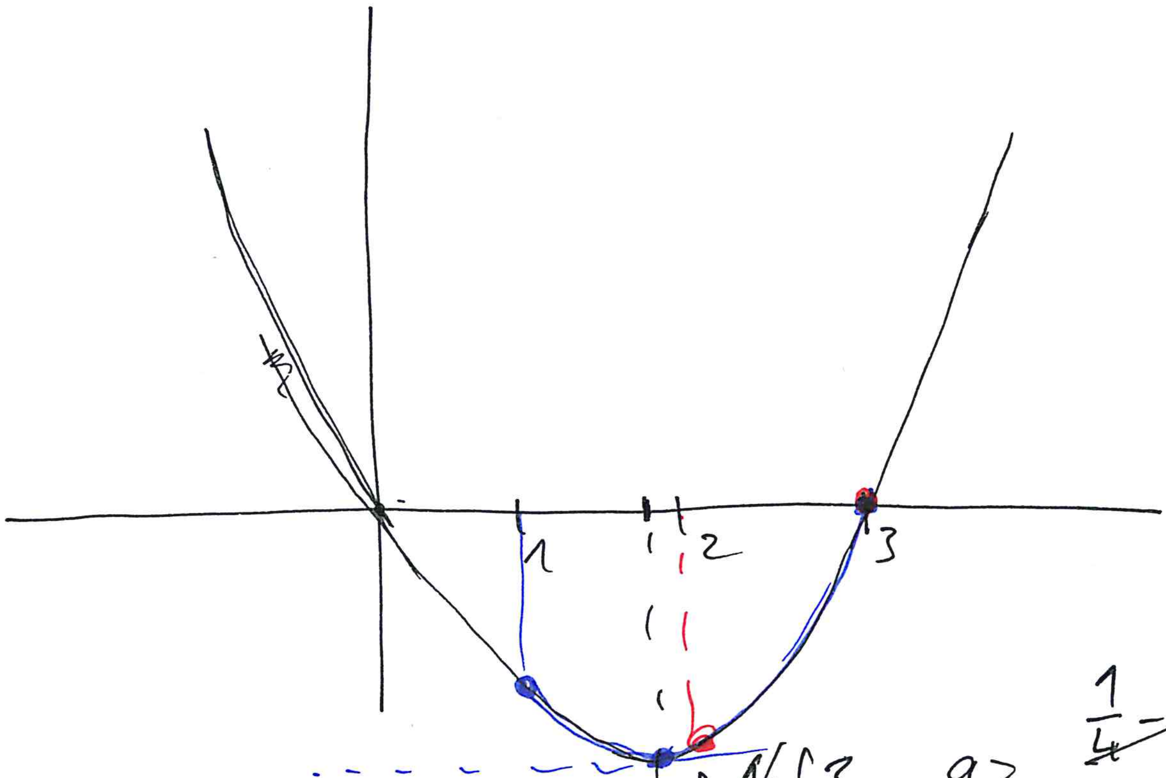
$f(x) = x^2 - 3x$

$I_1 = [2, 3)$

$f(I_1) = [-2, 0)$

$I_2 = [1, 3]$

$f(I_2) = \left[-\frac{9}{4}, 0 \right]$



$\left[\cancel{\frac{1}{2}} \right] \left[\frac{3}{2}, -\frac{9}{4} \right]$

$\cancel{\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}}$

$\frac{9}{4} - \frac{9}{2}$

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

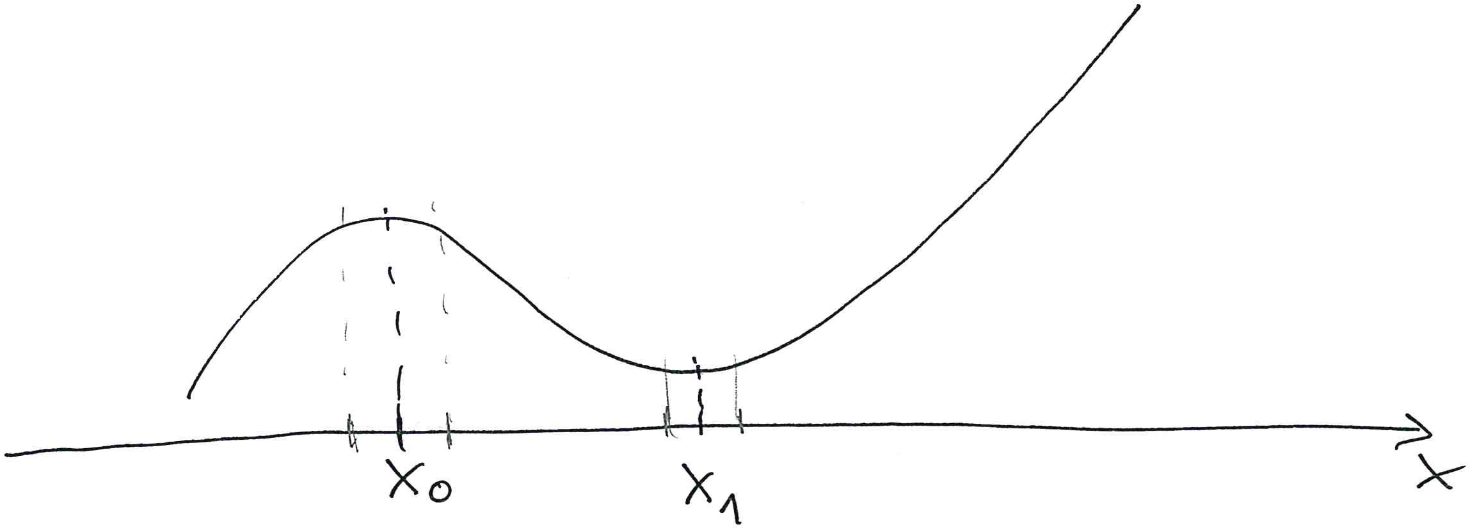
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 lokální maximum (lokální minimum), pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

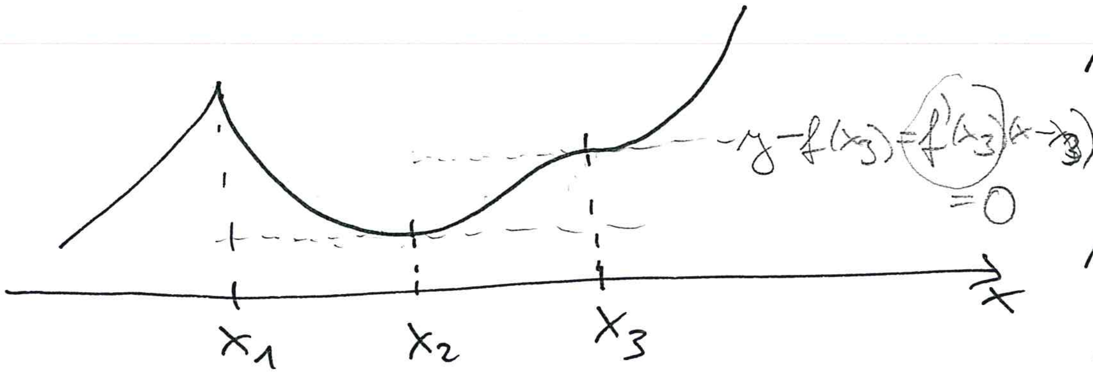
$$(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) \le f(x_0)).$$

$$(\forall x \in U_\delta(x_0))(f(x) \ge f(x_0))$$

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 lokální extrém, pokud má v x_0 buď lokální maximum nebo lokální minimum.



DERIVACE A LOKÁLNÍ EXTRÉMY



v bodě x_1 má funkce lokální maximum a neplatí $f'(x_1)=0$

v bodě x_2 má funkce lokální minimum a platí $f'(x_2)=0$

v bodě x_3 nemá funkce lokální extrém a platí $f'(x_3)=$

Neplatí tedy ani z jedna implikací mezi výroky

v x_0 má f lokální extrém

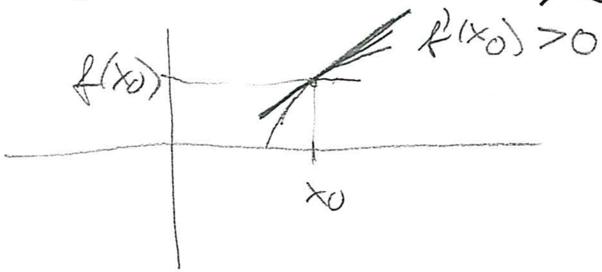
v x_0 má f nulovou derivaci

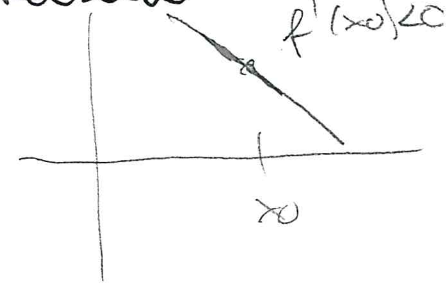
$f(x)=|x|$, $x_0=0$

$f(x)=x^3$, $x_0=0$

Věta o derivaci a extrémech:

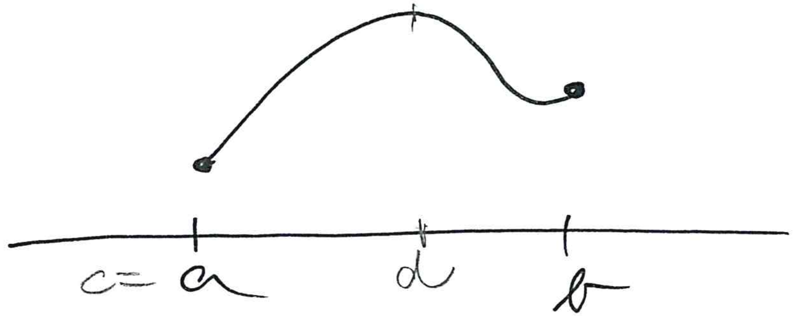
Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci a lokální extrém, pak je $f'(x_0)=0$.



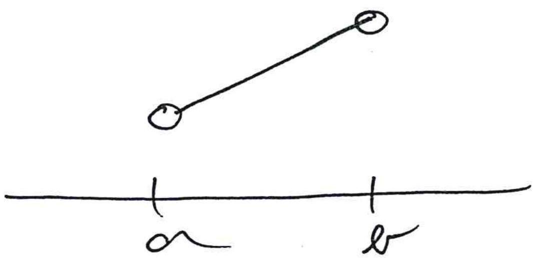


WEIERSTRASSOVA VĚTA

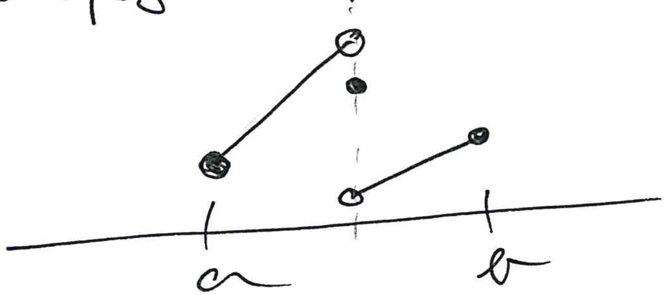
Věta:
Nechť $I = [a,b]$ je uzavřený interval a funkce f je spojitá na I.
Pak existují $c, d \in I$ taková, že platí $(\forall x \in I)(f(c) \leq f(x) \leq f(d))$.



Otevřený interval



Nespojitá funkce

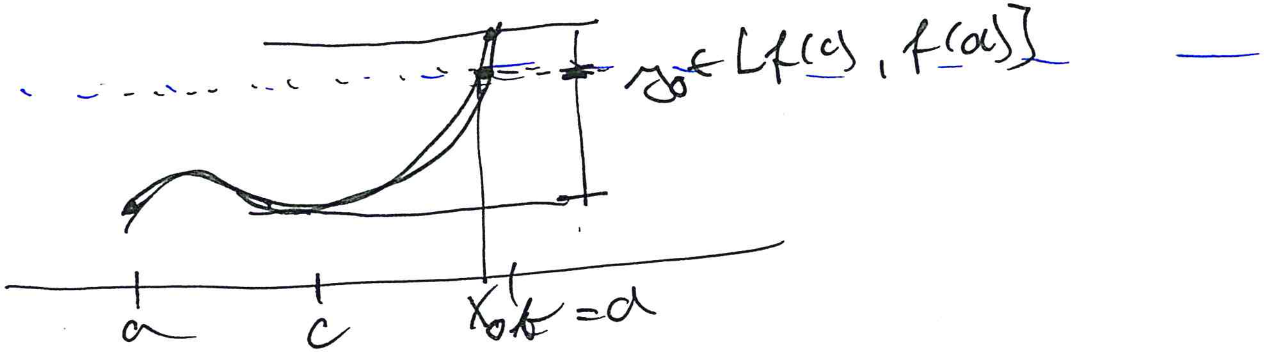


V těchto příkladech není splněn jeden z předpokladů věty a není splněn ani závěr věty.

Věta:

Nechť $I = [a, b]$ je uzavřený interval, f je spojitá na I, pak $f(I)$ je uzavřený interval.

Důkaz:



Dle Weierstrassovy věty existují c, d ....

Ukážeme, že $f(I) = [f(c), f(d)]$

1) $f(I) \subseteq [f(c), f(d)]$

2) $\supseteq$

$$(\forall y_0 \in [f(c), f(d)]) \, (\underbrace{y_0 \in f(I)}_{(\exists x_0 \in I)(f(x_0) = y_0)}) \leftarrow \text{chceme ukázat}$$

$g(x) = f(x) - y_0$ $\quad f(x_0) = y_0$ znamená $g(x_0) = 0$

$g(c) = f(c) - y_0 < 0$

$g(d) = f(d) - y_0 > 0$

g je spojitá na intervalu $[c, d]$ $([d, c])$

$g(x) = 0$

$f(x) - y_0 = 0$

$f(x) = y_0$

Tedy $f(I) = [f(c), f(d)]$

MONOTONNÍ FUNKCE

Definice:

Řekneme, že je funkce f rostoucí (klesající) na množině M,
nerostoucí

pokud platí

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Příklady:

$x \mapsto x^2$ je rostoucí na $[0, +\infty)$ a klesající na $(-\infty, 0]$

$x \mapsto x^3$ je rostoucí na $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ je klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$,

ale není klesající na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

VĚTY O DERIVACI A MONOTONII

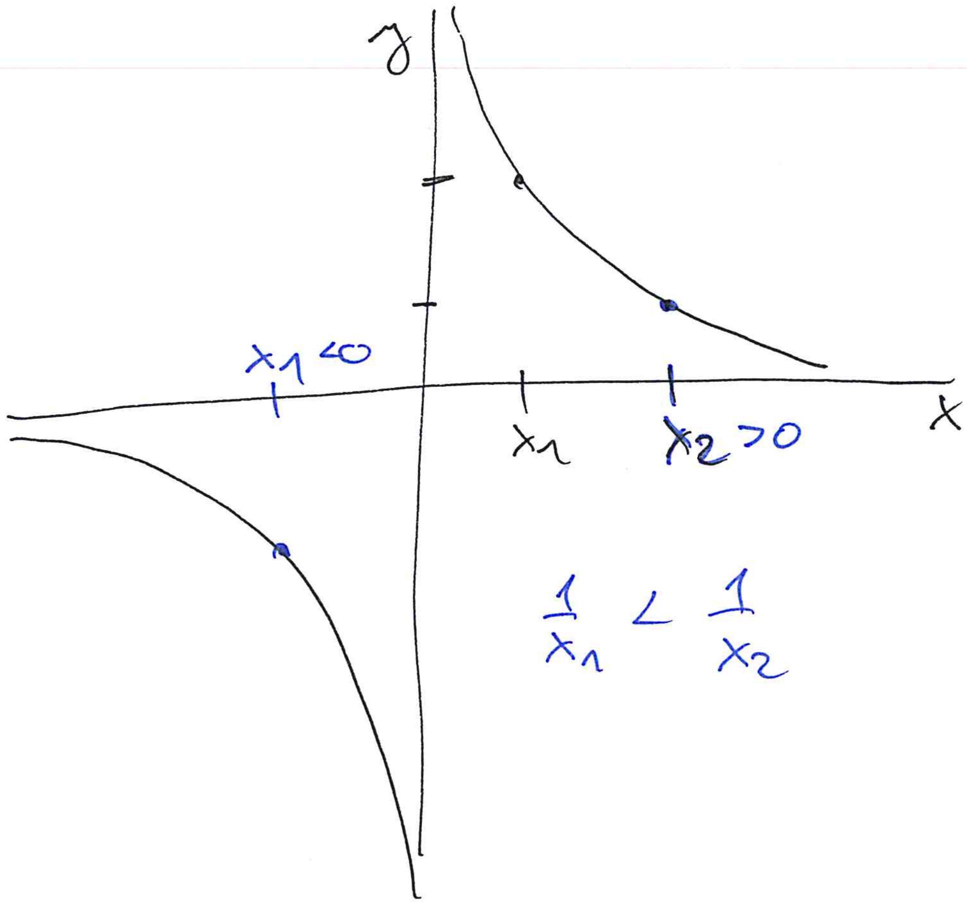
Věta:

Nechť má funkce f na intervalu I derivaci.
Pak je f rostoucí na I právě když je f' na I nezáporná a není nulová na žádném podintervalu I.
(kladné délky)

Příklady:

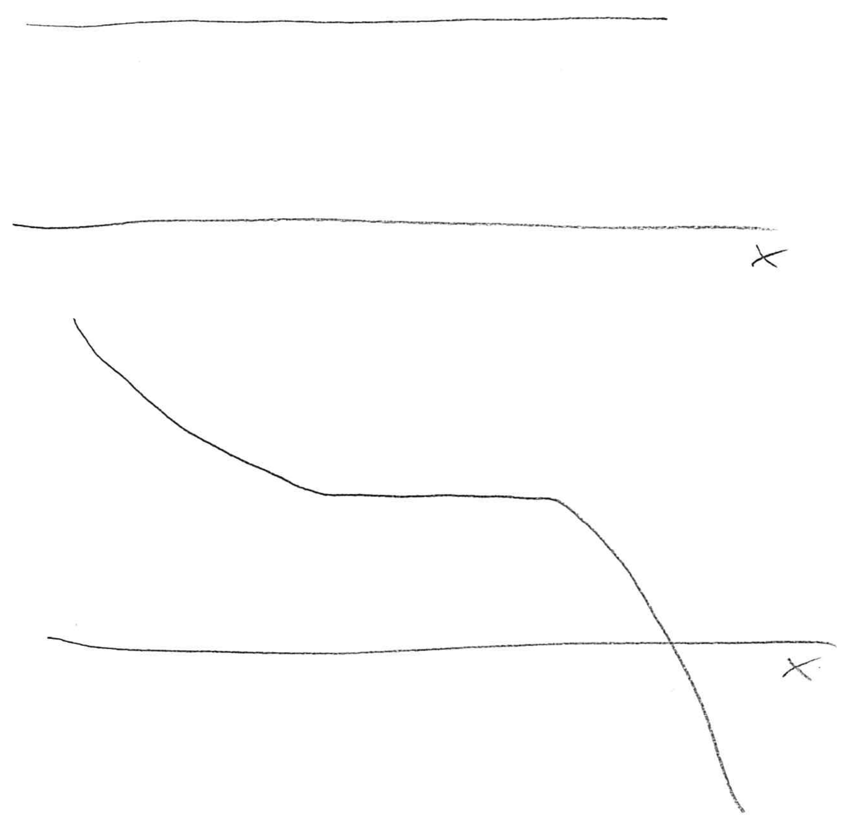
$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = 0$ pouze pro $x = 0$,
f je rostoucí na $\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{-1}{x}$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ na $M = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
M není interval, větu lze použít na intervaly $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, na nich je f rostoucí



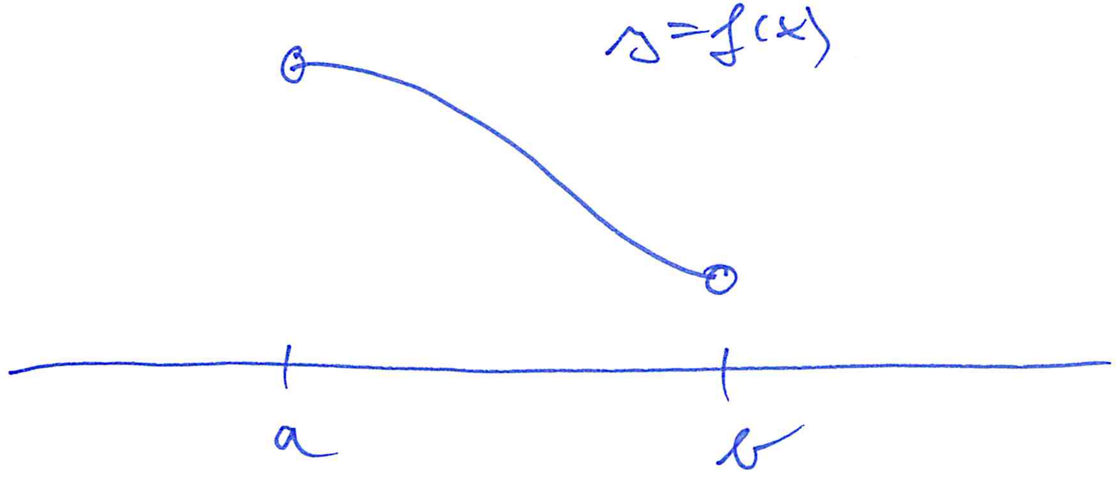
$$\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$$

nerostoucí funkce



Znamená něco jiného:

- funkce je nerostoucí
- funkce není rostoucí



$f(a) = ?$ aby f nebyla klesající na $[a, b)$?

Příklad:

$f(x) = -x^3+5x^2-7x$, $I = [0,2]$ — závěr: $f(I) = [-3,0]$

$f(0) = 0$

$f(2) = -8+20-14 = -2$

lokální extrémy:

$f'(x) = -3x^2+10x-7 = 0$

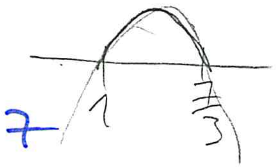
$x_1 = 1 \in I$

$x_2 = \frac{7}{3} \notin I$

0	1	2	$\cancel{7/3}$
0	-3	-2	

Monotonie f:

$f'(x) = -3x^2+10x-7$



$f'(x) \geq 0 \quad x \in [1, \frac{7}{3}]$

$f'(x) \leq 0 \quad x \in (-\infty, 1] \cup [\frac{7}{3}, +\infty)$

závěr:

f je rostoucí na $[1, \frac{7}{3}]$

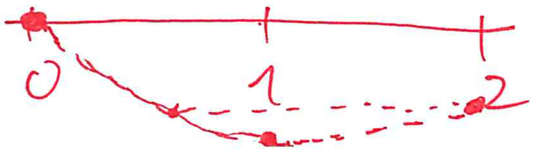
klesající na $(-\infty, 1]$

— " — na $[\frac{7}{3}, +\infty)$

$f((0,2]) = [-3,0)$

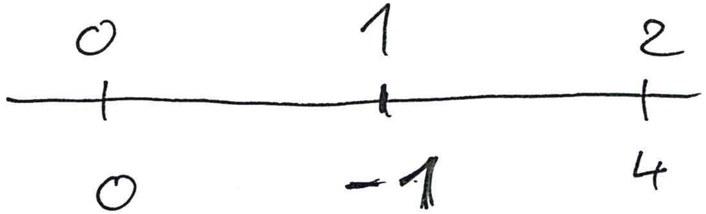
$f((0,2)) = [-3,0)$

$f([0,2)) = [-3,0]$



Příklad:

$g(x) = x^3 - x^2 - 1 + |x-1| \qquad I = [0,2]$



$g(I)$ je uzavřený interval

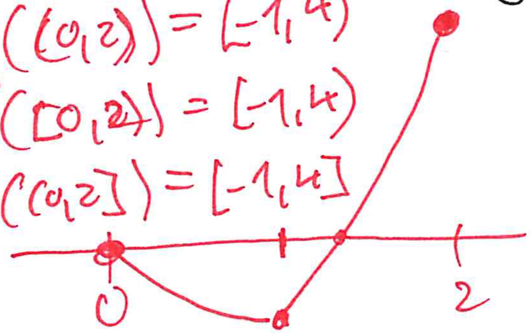
$g(0) = 0$

$g(2) = 4$

$g((0,2)) = [-1,4)$

$g([0,2)) = [-1,4)$

$g((0,2]) = [-1,4]$



$g(I) = [-1,4]$

lokální extrémy

$x > 1 \qquad g(x) = x^3 - x^2 - 1 + x - 1$

$g'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$D = 4 - 12 < 0$

$x < 1 \qquad g(x) = x^3 - x^2 - 1 - (x-1)$

$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{3} \notin I$

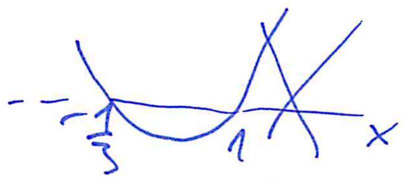
$x=1: g'(x) = ?$

Monotonie:

$x > 1$

$g'(x) > 0$

$x < 1$



$g'(x) > 0 \;..\; x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$

$g'(x) < 0 \;..\; x \in (-\frac{1}{3}, 1)$

Závěr:

g je rostoucí na $(-\infty, -\frac{1}{3}]$

klesající na $[\frac{1}{3}, 1]$

rostoucí na $[1, +\infty)$