1b $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} \qquad I = [0,3]$

$$f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f(3) = \frac{4\sqrt{11}}{11} = \frac{4}{\sqrt{11}}$$

2

$$f(2) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$f(I) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

když nevím, napíšu, že tam je menší z $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{11}}$

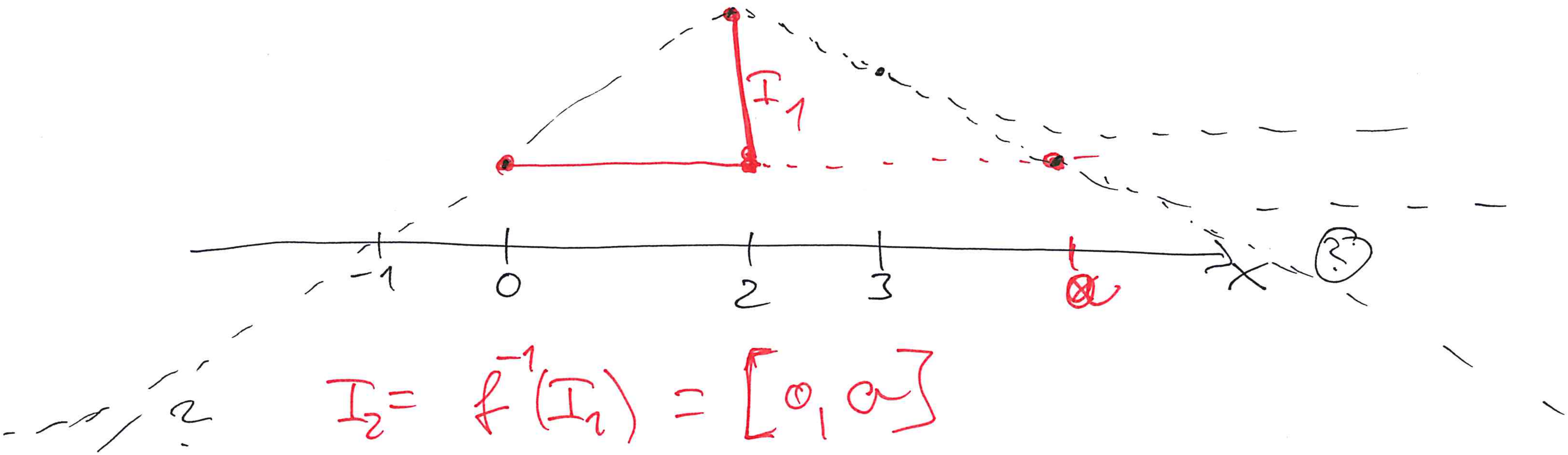
$I_1 = f(I) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

I_2 je vzor I_1 $= f^{-1}(I_1)$

Definice

Vzor intervalu I ve funkci f je množina

$f^{-1}(I_1) = \{ x : f(x) \in I_1 \}$



$I_2 = f^{-1}(I_1) = [0, a]$

Výpočet a:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}(x+1) = \sqrt{x^2+2} \qquad /^2$$

$$2(x^2+2x+1) = x^2+2$$

$$x^2+4x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -4$$

závěr: I_a [illegible] $I_2 = [0, +\infty)$

$f(x) = |x^2 + 3x - 4| + x - 3 \qquad I = (-2, 1)$

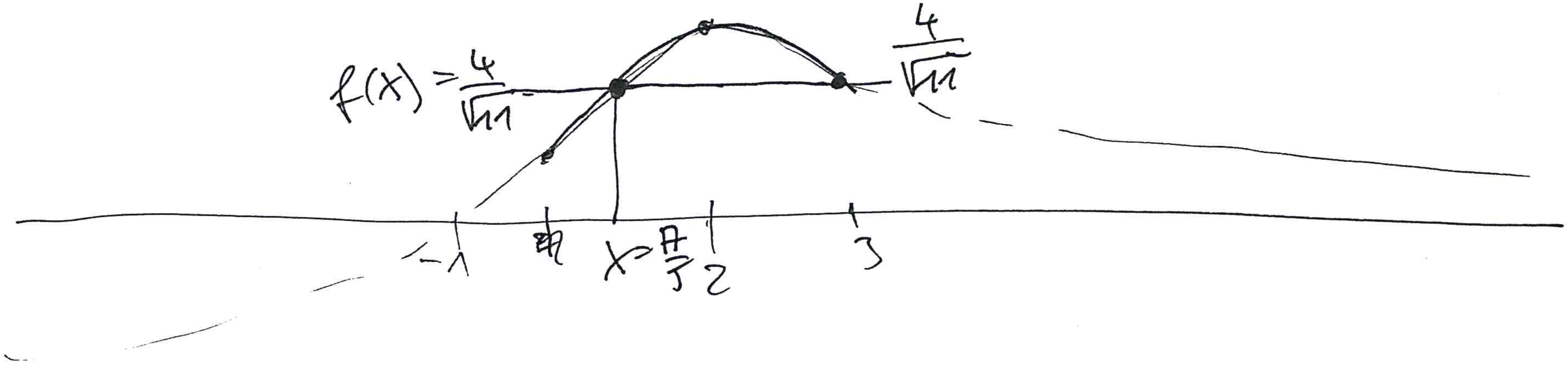
$I_1 = f(I) = (-2, 2]$

$I_2 = f^{-1}(I_1)$

řešme rovnice $f(x) = -2$

$f(x) = 2$

$I_2 = [-2-\sqrt{13}, -5) \cup (-3, 1) \cup (1, -2+\sqrt{13}]$



$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{4}{\sqrt{11}}$$

$\vdots$

$$5x^2 - 22x + 21 = 0$$

$$(5x^2 - 22x + 21) : (x-3) = 5x - 7$$

$x_1 = 3$

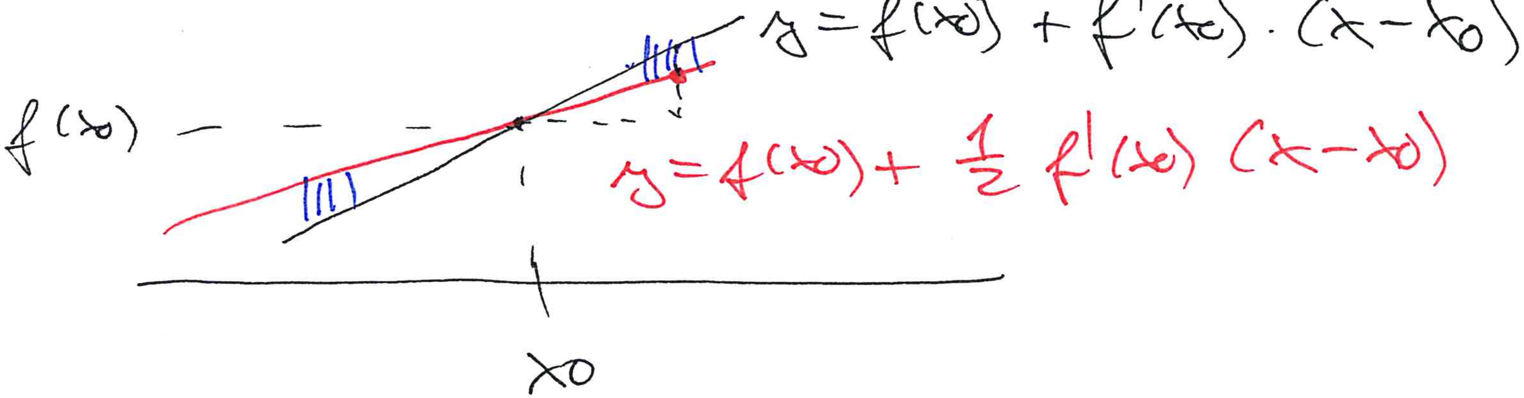
$x_2 = \frac{7}{5}$

Důkaz věty o derivaci a extrémech

a) $f'(x_0) > 0$, pak ex. $\delta > 0$ takové, že

$$(\forall x \in (x_0-\delta, x_0))\,(f(x) < f(x_0))$$

$$(\forall x \in (x_0, x_0+\delta))\,(f(x) > f(x_0))$$



$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2} f'(x_0)$$

pro $x \in U_\delta(x_0)$:

$$\boxed{\underbrace{f'(x_0)-\varepsilon}_{=\frac{1}{2}f'(x_0)} < \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} < f'(x_0)+\varepsilon$$

x_0

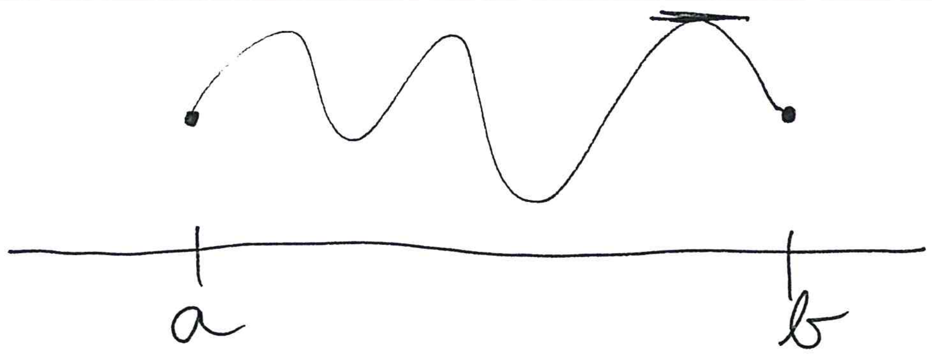
$x - x_0 < 0$ $\qquad\qquad$ $x - x_0 > 0$

$\frac{1}{2} f'(x_0)(x - x_0) > f(x) - f(x_0)$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2} f'(x_0)(x - x_0) < f(x) - f(x_0)$

$$\boxed{f(x) < f(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0) \qquad\qquad f(x) > f(x_0) + \frac{1}{2} f'(x_0)}$$

---

b) $f'(x_0) < 0$ $\qquad$ $\varepsilon = -\frac{1}{2} f'(x_0)$



Rolleova věta:

Nechť je f spojitá na $[a,b]$, má derivaci na (a,b), $f(a)=f(b)$.
Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f'(c)=0$.

Důkaz:

Jsou tři možnosti: 1) $(\forall x \in [a,b])(f(x)=f(a))$

pak $c \in (a,b)$ .. $f'(c)=0$

2) $(\exists x \in [a,b])(f(x)>f(a))$

3) — " — $(f(x)<f(a))$

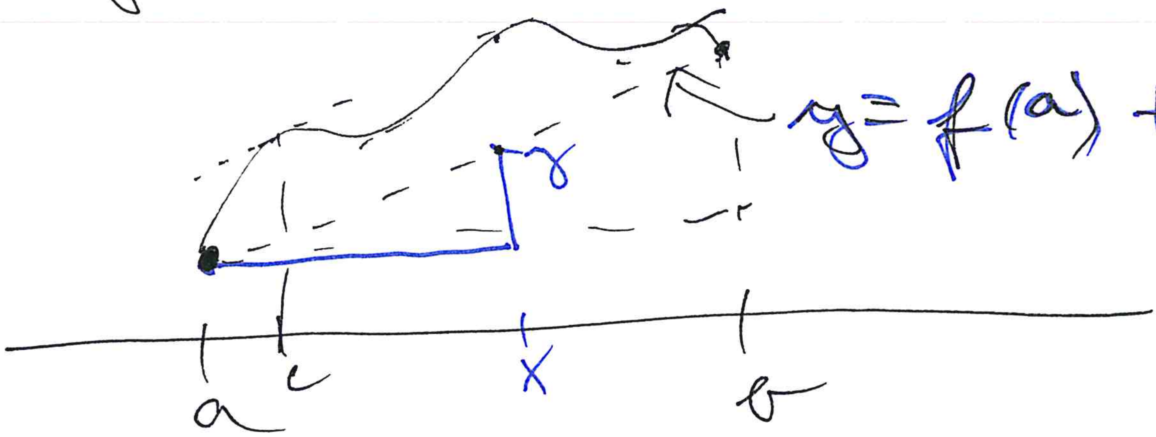
ad 2) dle Weierstrassovy věty .. c je bod v němž

f nabývá <u>maxima</u> na $[a, b]$ .. $c \in (a, b)$ .. $f'(c)=0$

ad 3) $\downarrow$

minima

Lagrangeova věta



Směrnice

$$y = f(a) + \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\,(x-a)$$

Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a má derivaci na (a,b).

Pak existuje $c \in (a,b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Důkaz:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$F(a) = \underbrace{f(a)-f(a)}_{=0} - \underbrace{\dots\,(a-a)}_{=0}$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b}-a}(\cancel{b}-a) = 0$$

$$F(a) = F(b)$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

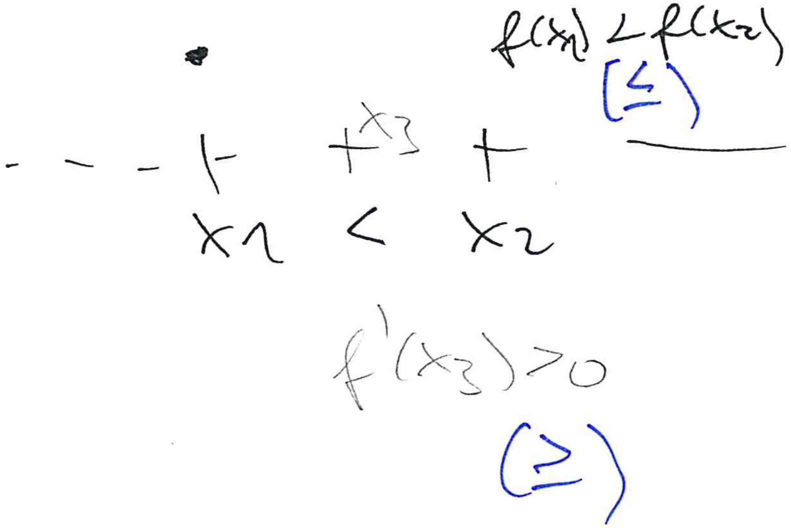
funkcija Rolleova velja : ob. $c \in (a,b)$, že

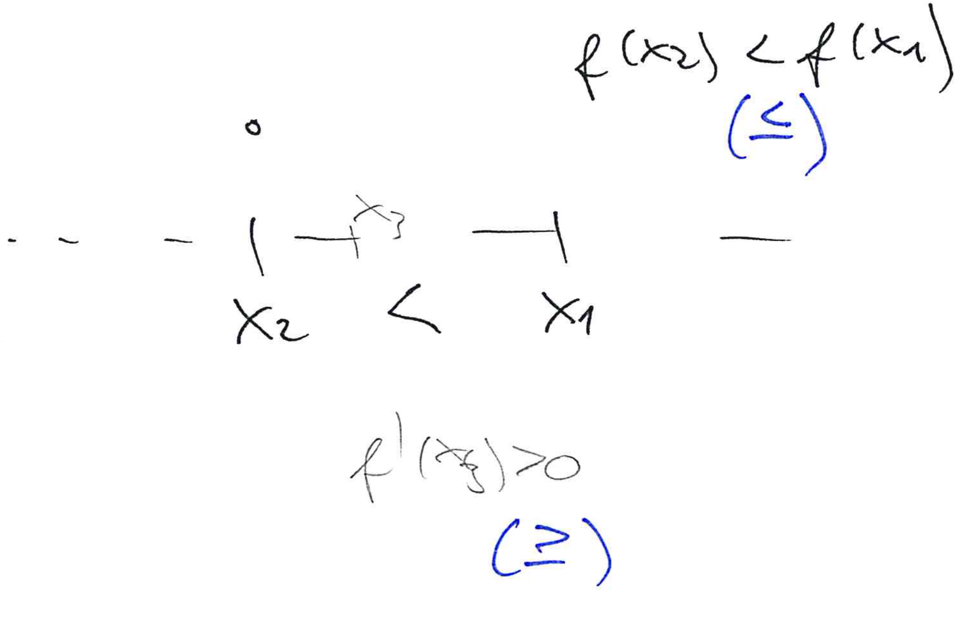
$$F'(c) = 0 \text{, torej } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lema:

Funkce f je rostoucí (neklesající) na intervalu I právě když pro $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ platí

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad (\geq)$$





Věta:

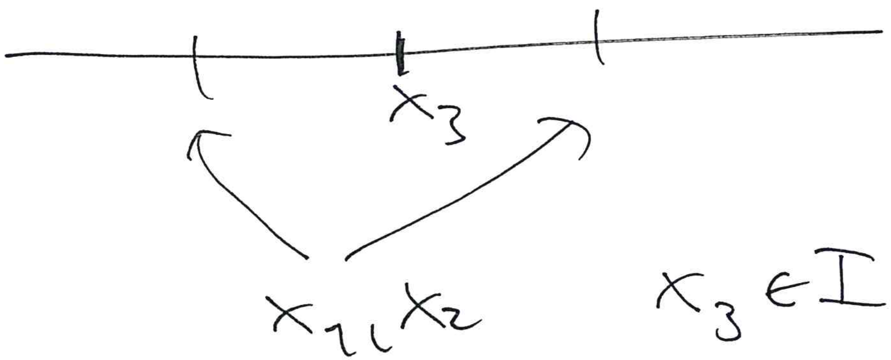
Nechť má funkce f na intervalu I derivaci.
Pak je f neklesající na I <u>právě když</u> je f' na I nezáporná.

$\Leftarrow$

Důkaz:

$$x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \neq x_2$$

Lagrangeova věta: $$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(x_3) \geq 0$$



$x_3 \in I$

Příště: důkaz opačné implikace $\Leftarrow$