TAYLORŮV POLYNOM

Definice:

Taylorovým polynomem funkce f v bodě a stupně n nazýváme polynom:

pro $n=0$ $\qquad T_0(x) = f(a)$

$n=1$ $\qquad T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Věta o zbytku Taylorova polynomu

Nechť T_n je T.P. funkce f v bodě a stupně n,

f má ~~derivace~~ derivaci až do řádu $(n+1)$ mezi

body a, x a f je spojitá na intervalu $[a,x]$ $([x,a])$.

Pak ~~$R_n(x) =$~~ existuje bod ~~ne~~ c mezi a, x, že

$$R(x) = ?$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\,(x-a)^{n+1}$$

$$\left(R_1(x) = \frac{1}{2} f''(c_1)(x-a)^2 \right\},\quad R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(c_2)(x-a)^3 \ldots \Big)$$

Zbytek Taylorova polynomu
(residuum)

$$R_n(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{aproximovaná hodnota}} - \underbrace{T_n(x)}_{\text{aproximující bodom}}$$

$$R_0(x) = f(x) - f(a)$$

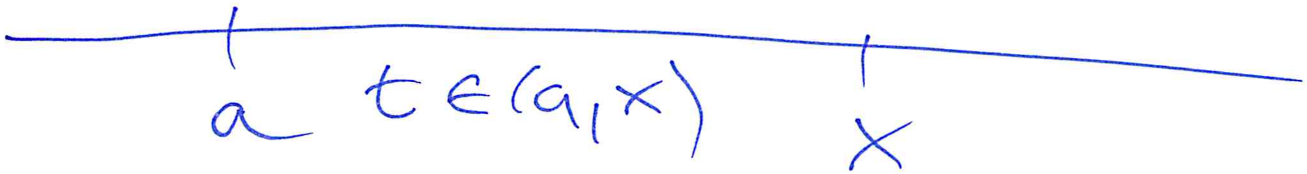
$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

Důkaz:

pro $n = 1$:

$$\cancel{F(x) = R_1(x) =}$$

$$F(t) = R_1(t) - \frac{R_1(x)}{(x-a)^2}(t-a)^2$$



$$R_1(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$$

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

$$R_1(a) = f(a) - f(a) - f'(a)(a-a) = 0$$

$$F(a) = \underbrace{R_1(a)}_{=0} - \frac{R_1(x)}{(x-a)^2}\underbrace{(a-a)^2}_{=0} = 0$$

$$F(x) = 0$$

$$t = x$$

$$F'(t) = R_1'(t) - \frac{R_1(x)}{(x-a)^2} \cdot 2(t-a)$$

$$= f'(t) - 0 - f'(a) \cdot 1$$

Rolleova věta: existuje c mezi a, x:

$$F'(c) = 0 \quad \ldots \quad f'(c) - f'(a) \cdot \frac{R_1(x)}{(x-a)^2} \cdot 2(c-a)$$

$$F'(a) = 0$$

Znovu Rolleova věta ...

dokončíme příště