[JV], str. 49, definice 2.1.1 posloupnosti reálných čísel

Definice (limity posloupnosti)

Řekneme, že číslo $L \in \mathbb{R}$ je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N},\, n > K)\,(a_n \in \underbrace{(L-\varepsilon,\, L+\varepsilon)}_{\mathcal{U}_\varepsilon(L)})$$

Značíme: $\lim a_n = L$ $\qquad |a_n - L| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \qquad a_n \to L$ pro $n \to \infty$

Příklad:

$$a_n = \sqrt{n^2+3n+1} - n = \frac{(3n+1)\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2+3n+1}+n\right)\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\underbrace{3+\frac{1}{n}}_{\to 3}}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}_{\to 1}}}_{\to\sqrt{1}}+1} \to \frac{3}{2}$$

Věty: o limitě a aritmetických operacích

o limitě složené funkce, $\frac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$

konvergentní posloupnost – viz [JV], str. 51, poznámka 3 v 2.1.8

[JV], definice 2.4.6 na str. 67:

Cauchyovská posloupnost

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists K)(\forall m,n\in \mathbb{N},\ m\geq K, n\geq K)(|a_m - a_n|<\varepsilon)$$

Lema:

Je-li $\{a_n\}$ konvergentní, pak je Cauchyovská.

Důkaz

$$|a_n - L| < \cancel{\varepsilon}\ \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - L| < \cancel{\varepsilon}\ \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_m - a_n| = |a_m - L - (a_n - L)| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \cancel{2\varepsilon}\ \varepsilon$$

Platí opačná implikace?

Je každá Cauchyovská posloupnost konvergentní?

Záleží na číselném oboru:

v $\mathbb{Q}$ (racionální čísla) NE

v $\mathbb{R}$ (reálná čísla) ANO

Příklady:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1.4$, $a_3 = 1.41$, $a_4 = 1.414$, $a_5 = 1.4142$,

$a_6 = 1.41421$, $a_7 = 1.414213$, $a_8 = 1.4142135$ ...

$$|a_{50} - a_{100}| < 10^{-49}$$

a_{100}

a_{50}

$$\underbrace{1.4142135\ldots\ldots}_{49 \text{ cifer}}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{50 \text{ cifer}}$$

Posloupnost je Cauchyovská

a v $\mathbb{R}$ je konvergentní (limita je $\sqrt{2}$)

v $\mathbb{Q}$ není konvergentní

Příklad (z [JV], 3.2.7)

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$$

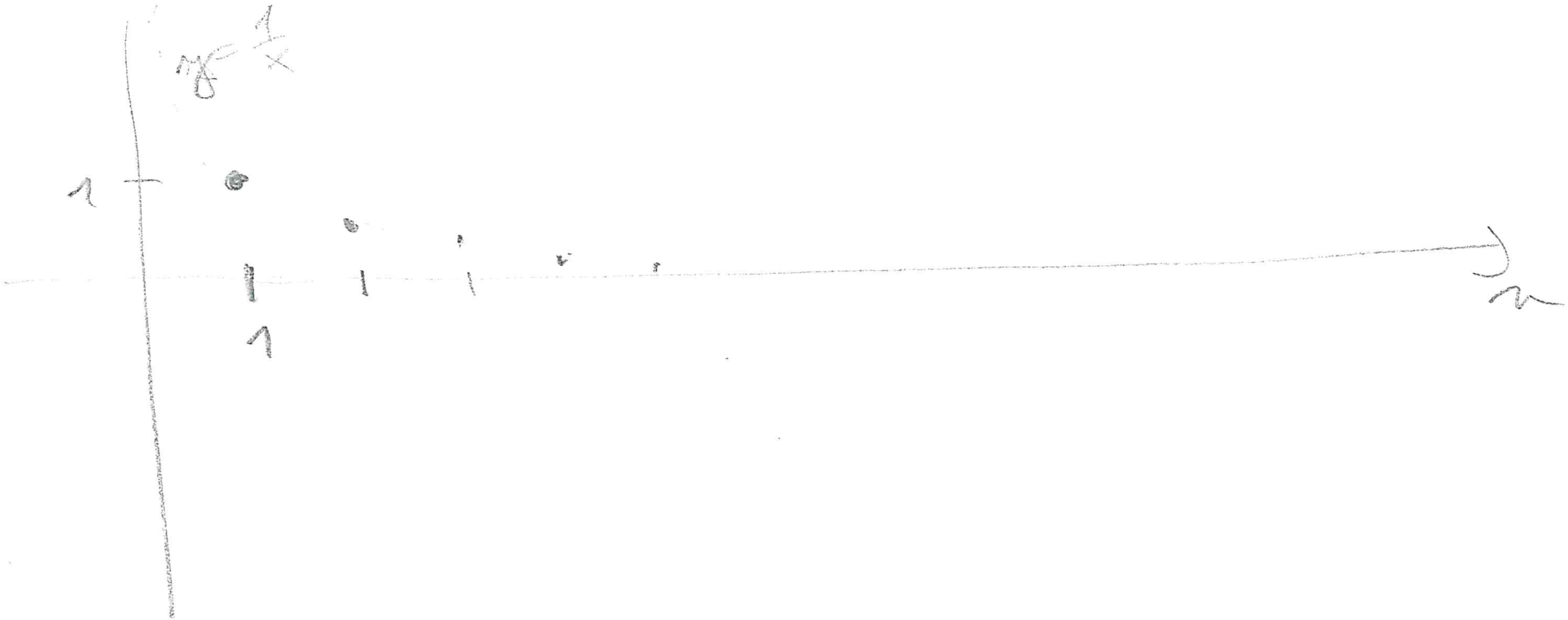
$$\lim a_n = e \quad (= 2.71828 \ldots \text{ Eulerovo číslo})$$

(je iracionální)

graf posloupnosti (jako graf funkce)

množina $\{[n, a_n] : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in D,\ y = f(x)\}$

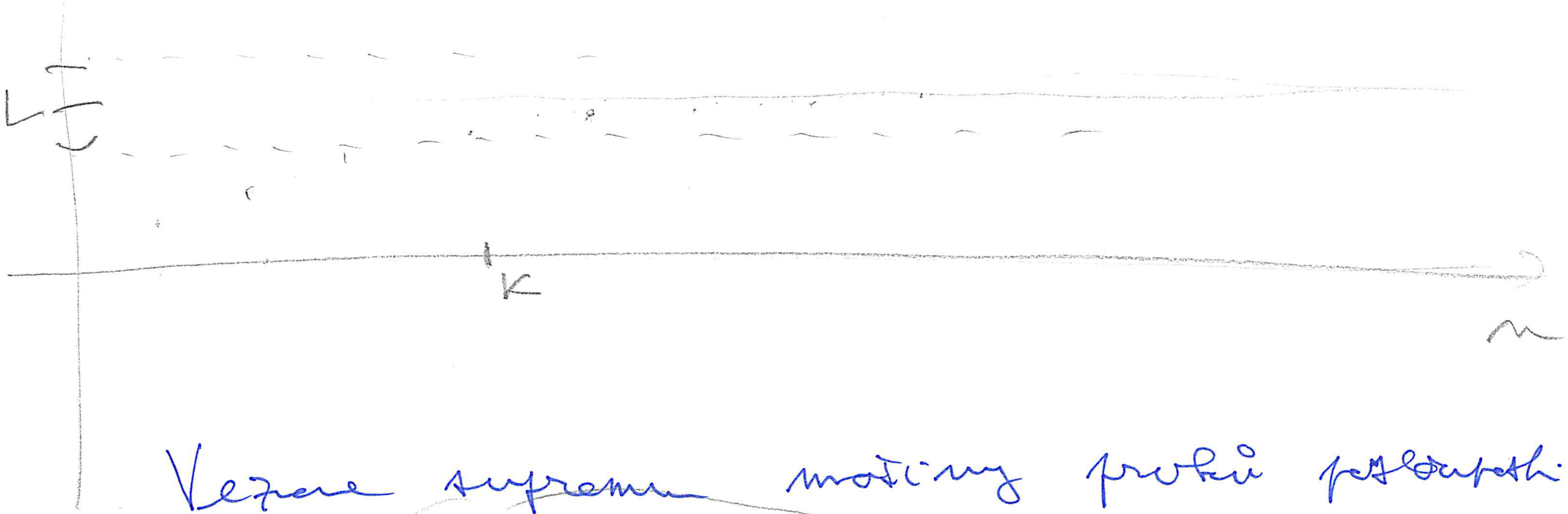
$$a_n = \frac{1}{n}$$



Věta:

Posloupnost, která je monotónní a omezená je konvergentní.

Důkaz – provedeme pro rostoucí posloupnost
$(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} > a_n)$



Vezmeme supremum množiny prvků posloupnosti:

$\sup \underbrace{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}_{M} = L$ a ukážeme, že

L je limita $\{a_n\}$

Supremum je horní závora M, tedy:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq L)$$

Supremum je nejmenší horní závora M:

$$L-\varepsilon < L \quad (\text{pro } \varepsilon > 0)$$

$L-\varepsilon$ není horní závora M:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(a_n > L-\varepsilon)$$

ke $\varepsilon > 0$ .. máme K .. $L > a_K > L-\varepsilon$

odtud $a_K \in U_\varepsilon(L)$

monotonie: $n > K$, $\left.\begin{array}{l} a_n > a_K > L-\varepsilon \\ \text{zároveň } a_n \leq L \end{array}\right\}$ $n > K \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(L)$